Exercice 1. (**) a. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\forall x \in \mathrm{E}$, $(x|u(x)) = 0$;
(ii) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $(x|u(y)) = -(y|u(x))$;
(iii) dans toute base orthonormale de E, la matrice représentative de u est antisymétrique ;
(iv) il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de u est antisymétrique.

Les endomorphismes de E de ce type sont appelés *antisymétriques*.

b. Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^3$, vérifier que l'endomorphisme $\varphi_a : x \mapsto a \wedge x$ de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique pour le produit scalaire usuel.

c. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ est de la forme φ_a pour un certain a de $\mathbb{R}^3$.

d. Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On note $\alpha = a/||a||$. On choisit un vecteur β unitaire orthogonal à α et on pose $\gamma = \alpha \wedge \beta$, si bien que le triplet (α, β, γ) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice de φ_a dans cette base.

Exercice 2. (*) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 2. Posons $a = (1, -1, 2)$. On remarque l'égalité $\mathrm{P}^\perp = \mathrm{Vect}(a)$.
Pour tout élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{P}^\perp$ vaut

$$\frac{(x|a)}{(a|a)}a = \frac{x - y + 2z}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}\left(x(1, -1, 2) + y(-1, 1, -2) + z(2, -2, 4)\right).$$

La matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $\mathrm{P}^\perp$ est donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

On connaît la relation $p_{\mathrm{P}} + p_{\mathrm{P}^\perp} = \mathrm{Id}$. La matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur P vaut donc $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. (*) Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E de dimension n. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente p dans une certaine base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

Montrer l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2 = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$ puis l'inégalité $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$.

Solution de l'exercice 3. Posons $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2$. Cette somme est le produit scalaire (canonique) de A par elle-même, ce qui donne $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{A})$.

L'endomorphisme p est symétrique. La matrice A le représente dans une base orthonormale donc cette matrice est symétrique, ce qui donne $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$.
L'endomorphisme p est une projection, ce qui donne $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ puis $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id_E})$. On sait que F est aussi l'image de p donc sa dimension, notée r, est aussi le rang de p.
Dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$, la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{tr}(p) = r = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

Définissons une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $b_{i,j} = 1$ si $a_{i,j} \geqslant 0$ et $b_{i,j} = -1$ sinon. Pour ce choix de la matrice B, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = (\mathrm{A}|\mathrm{B}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}||$ or $||\mathrm{A}|| = \sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$ et

$$||\mathrm{B}||^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1 = n^2$$

donc $||\mathrm{B}|| = 1$ et on a alors prouvé la majoration

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}.$$

Exercice 4. (**) Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) l'endomorphisme p est un projecteur orthogonal ;
(ii) l'endomorphisme p est 1-lipschitzien pour la norme euclidienne.

Solution de l'exercice 4. Première implication. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$, de sorte que p est le projecteur sur F parallèlement à $\mathrm{F}^{\perp}$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Ce vecteur se décompose sous la forme

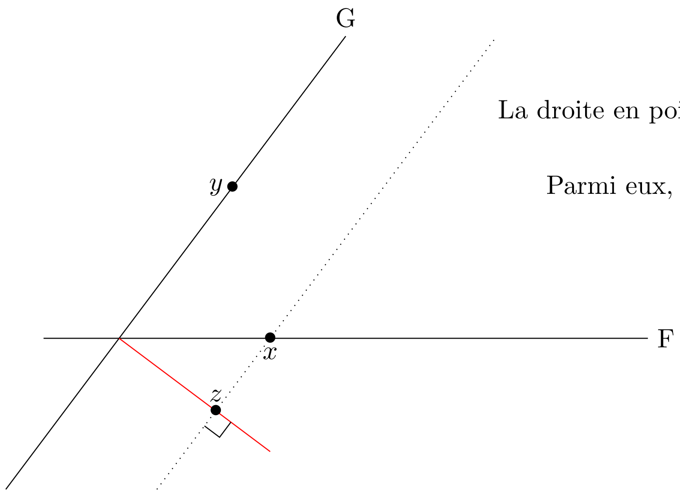
$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{F}^{\perp}}.$$

La formule de Pythagore donne alors

$$||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2 \geqslant ||p(x)||^2$$

puis $||p(x)|| \leqslant ||x||$, ce qui prouve que p est 1-lipschitzien pour la norme euclidienne.

Deuxième implication. On suppose que p n'est pas un projecteur orthogonal. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(p)$. Ces deux espaces ne sont pas orthogonaux donc on peut choisir x dans F et y dans G tels que $(x|y) \neq 0$.



La droite en pointillés contient les points qui se projettent sur x.

Parmi eux, le plus proche de l'origine est z.

Posons $z = x - \dfrac{(x|y)}{(y|y)}y$. On a alors $p(z) = x$. De plus, le vecteur z est orthogonal à y donc

$$||x||^2 = ||z||^2 + \left|\left|\frac{(x|y)}{(y|y)}y\right|\right|^2 = ||z||^2 + \frac{(x|y)^2}{(y|y)} > ||z||^2,$$

ce qui donne $||p(z)|| > ||z||$. Le projecteur p n'est donc pas 1-lipschitzien.

Par contraposition, l'énoncé (ii) implique l'énoncé (i). Ces deux énoncés sont donc équivalents.

Exercice 5. (*) Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique, dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité).

Montrer l'égalité $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j})^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k)^2$.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f avec la condition $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

a. Montrer l'encadrement $\lambda_1 ||x||^2 \leqslant (x|f(x)) \leqslant \lambda_n ||x||^2$ pour tout x de E.

b. Montrer que l'égalité $(x|f(x)) = \lambda_1 ||x||^2$ a lieu si et seulement si x appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id_E})$.

c. Montrer que l'égalité $(x|f(x)) = \lambda_n ||x||^2$ a lieu si et seulement si x appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_n \mathrm{Id_E})$.

d. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note $\mathscr{G}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.
Montrer la formule suivante

$$\lambda_k = \min_{\mathrm{F} \in \mathscr{G}_k} \max_{x \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \frac{(x|f(x))}{||x||^2}.$$

Solution de l'exercice 6. Le théorème spectral permet de choisir une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i soit un vecteur propre pour la valeur propre λ_i.

a. Soit $x \in \mathrm{E}$. On introduit sa décomposition dans la base $\mathcal{E}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

On rappelle que les coefficients de x sont donnés par $x_i = (e_i|x)$. On trouve

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$$

puis

$$(x|f(x)) \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i (x|e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a l'encadrement $\lambda_1 x_i^2 \leqslant \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n x_i^2$ donc

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 ||x||^2 \leqslant (x|f(x)) \leqslant \lambda_n ||x||^2.$$

---

b. Soit λ une valeur propre de f et x un élément de $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id_E})$.
On a alors $f(x) = \lambda x$ donc $(x|f(x)) = \lambda ||x||^2$.

Le ≪ si ≫ des questions b et c est donc démontré.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{E}$. On suppose que $(x|f(x)) = \lambda_1 ||x||^2$. On reprend les notations de la question précédente. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0.$$

Notons i_1 le plus grand des indices i tels que $\lambda_i = \lambda_1$. Il reste

$$\sum_{i=i_1+1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) x_i^2 = 0.$$

Les termes de cette somme sont positifs. On en déduit qu'ils sont tous nuls. Pour tout $i \in [\![i_1+1, n]\!]$, la différence $\lambda_i - \lambda_1$ est non nulle donc x_i est nul. Il reste

$$x = \sum_{i=1}^{i_1} x_i e_i \quad \text{donc} \quad x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

L'équivalence demandée est alors démontrée.

---

c. Même méthode.

Préliminaire à la question d. Pour tout vecteur x non nul de E, posons $\varphi(x) = (x|f(x))/(x|x)$. Remarquons l'identité

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{||x||}\right).$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E non trivial.

Notons $\mathrm{S_F}$ la sphère unité de E pour la norme euclidienne. L'identité ci-dessus prouve l'égalité $\varphi(\mathrm{F} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}) = \varphi(\mathrm{S_F})$.

L'espace vectoriel F est de dimension finie donc l'application linéaire f est continue et le produit scalaire est continu sur F^2. On en déduit que φ est une fonction continue.

L'ensemble $\mathrm{S_F}$ est fermé et borné donc φ possède un maximum sur $\mathrm{S_F}$. Ce maximum est aussi un maximum de φ sur $\mathrm{F} \setminus \{0\}$. Il est donc possible de définir

$$\mathrm{M}_f(\mathrm{F}) = \max_{x \in \mathrm{F} \setminus \{0\}} \frac{(x|f(x))}{(x|x)}.$$

d. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, considérons les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{V}_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$$

de E.

Par le même raisonnement qu'à la première question, on obtient les encadrements

$$\forall x \in \mathrm{V}_k \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \quad \lambda_1 \leqslant \varphi(x) \leqslant \lambda_k \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{W}_k \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \quad \lambda_k \leqslant \varphi(x) \leqslant \lambda_n.$$

L'égalité $\varphi(e_k) = \lambda_k$ donne alors l'égalité $\mathrm{M}_f(\mathrm{V}_k) = \lambda_k$.

Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{G}_k$. On observe que $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{W}_k) = n + 1 > \dim(\mathrm{E})$ donc ces deux espaces ne sont pas en somme directe. Il existe donc dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{W}_k$ un vecteur z non nul. Pour un tel vecteur, on a

$$\lambda_k \leqslant \varphi(z) \quad \text{et} \quad \varphi(z) \leqslant \mathrm{M}_f(\mathrm{F}),$$

donc $\lambda_k \leqslant \mathrm{M}_f(\mathrm{F})$.

On a donc prouvé que λ_k est la plus petite valeur de $\mathrm{M}_f(\mathrm{F})$ quand F décrit $\mathscr{G}_k$.

Remarque. Par une méthode similaire, on peut prouver l'égalité

$$\lambda_k = \max_{F \in \mathscr{G}_{n+1-k}} \min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(x|f(x))}{(x|x)}.$$

Exercice 7. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note B la matrice extraite $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$, qui est donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant et $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ celles de B.

Montrer alors les inégalités $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

Solution de l'exercice 7. Dans le sillage de l'exercice précédent, pour tout vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(X) = \frac{{}^t\!X \cdot A \cdot X}{{}^t\!X \cdot X}.$$

De même, pour tout vecteur colonne Y non nul de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\psi(X) = \frac{{}^t Y \cdot B \cdot Y}{{}^t Y \cdot X}.$$

Notons $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(F_1, \ldots, F_{n-1})$ celle de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout vecteur colonne Y de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, notons $\hat{Y}$ le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenu à partir de Y en lui adjoignant un coefficient nul. On observe alors la relation

$$Y^T \cdot B \cdot Y = \hat{Y} \cdot A \cdot \hat{Y} \qquad \text{puis} \qquad \psi(Y) = \varphi(\hat{Y}).$$

Considérons une base orthonormale $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, le vecteur Y_k soit un vecteur propre de B pour la valeur propre μ_k.

Prenons k dans $[\![1, n-1]\!]$. Le même raisonnement que dans l'exercice 6 donne alors

$$\mu_k = \max \{\psi(Y) \,;\, Y \in \mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_k) \setminus \{0\}\}.$$

On en déduit l'expression

$$\mu_k = \max \left\{\varphi(X) \,;\, X \in \mathrm{Vect}(\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_k) \setminus \{0\}\right\}.$$

L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_k)$ est un élément de l'ensemble $\mathscr{G}_k$ des sous-espaces de dimension k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, d'après la formule de la question de l'exercice 6, on obtient l'inégalité

$$\mu_k \geqslant \lambda_k.$$

Pour majorer μ_k, il faut extrapoler de la résolution de l'exercice 6 la relation analogue

$$\lambda_{k+1} = \max_{F \in \mathscr{G}_{n-k}} \min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(x|f(x))}{||x||^2}.$$

On part alors de la relation

$$\mu_k = \min \{\psi(Y) \,;\, Y \in \mathrm{Vect}(Y_k, \ldots, Y_{n-1}) \setminus \{0\}\},$$

qui donne

$$\mu_k = \min \left\{\varphi(X) \,;\, X \in \mathrm{Vect}(\hat{Y}_k, \ldots, \hat{Y}_{n-1}) \setminus \{0\}\right\}.$$

L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\hat{Y}_k, \ldots, \hat{Y}_{n-1})$ est un élément de l'ensemble $\mathscr{G}_{n-k}$ des sous-espaces de dimension k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, d'après la formule de la question de l'exercice 6, on obtient l'inégalité

$$\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}.$$

Cet exercice est assurément le plus difficile de cette fiche.

Exercice 8. (**) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.

Pour tout polynôme réel P, on pose

$$\varphi(P) = ((1 - X^2)P')'.$$

a. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, prouver l'inégalité $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P)$. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ.

c. Vérifier que φ_n est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver ses valeurs propres.

d. Trouver une base de diagonalisation dans le cas $n = 3$. Vérifier qu'elle est orthogonale.

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$. En partant de l'identité

$$((X^2 - 1)^k (X^2 - 1))^{(k+2)} = (((X^2 - 1)^{k+1})')^{(k+1)},$$

calculer $\varphi(P_k)$.

Solution de l'exercice 8.

a. Je ne détaille pas la linéarité, qui découle de la linéarité de la dérivation. L'application φ est linéaire et va de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a successivement les inégalités suivantes

$$\deg(P') \leqslant \deg(P) - 1, \quad \deg((1 - X^2)P') \leqslant \deg(P) + 1, \quad \deg(((1 - X^2)P')') \leqslant \deg(P)$$

donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a alors $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant n$ donc $\varphi(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
On a alors prouvé que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

---

c. Pour tout polynôme P, posons $\tilde{P} = (1 - X^2)P'$.

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Une intégration par parties donne

$$(\varphi_n(P)|Q) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}'(t)Q(t)\ dt = \Big[\tilde{P}(t)Q(t)\Big]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)Q(t)\ dt.$$

Le polynôme $\tilde{P}$ s'annule en 1 et en -1 donc il reste

$$(\varphi_n(P)|Q) = -\int_{-1}^{1} (1 - t^2)P'(t)Q'(t)\ dt.$$

En échangeant les rôles de P et de Q, il vient

$$(P|\varphi_n(Q)) = -\int_{-1}^{1} (1 - t^2)Q'(t)P'(t)\ dt = (\varphi_n(P)|Q).$$

On a prouvé que φ_n est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le calcul donne $\varphi_n(1) = 0$ puis $\varphi_n(X) = -2X$ et

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \varphi_n(X^k) = -k(k + 1)X^k + k(k - 1)X^{k-2}.$$

En particulier, la matrice de φ_n est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les nombres $-k(k + 1)$, où k décrit $[\![0, n]\!]$.

---

d. La matrice de φ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ est

$$\mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que les valeurs propres de φ_3 sont simples. On en déduit en particulier que ses espaces propres sont de dimension 1.

Le calcul de la question précédente donne l'appartenance de 1 à $\mathrm{E}_0(\varphi_3)$ et de X à $\mathrm{E}_{-2}(\varphi_3)$. Ces espaces étant de dimension 2, on obtient les égalités

$$\mathrm{E}_0(\varphi_3) = \mathrm{Vect}(1), \quad \mathrm{E}_{-2}(\varphi_3) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}).$$

Le calcul donne ensuite

$$\mathrm{A}_3 + 6\mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{E}_{-6}(\mathrm{A}_3).$$

Le polynôme $1 - 3\mathrm{X}^2$ est donc un élément de $\mathrm{E}_{-6}(\varphi_3)$. Cet espace étant de dimension 1, c'est la droite dirigée par $1 - 3\mathrm{X}^2$.

De la même manière, on trouve que $\mathrm{E}_{-12}(\varphi_3)$ est la droite dirigée par $3\mathrm{X} - 5\mathrm{X}^3$.

---

e. La formule de Leibniz donne

$$((\mathrm{X}^2-1)^k(\mathrm{X}^2-1))^{(k+2)} = \sum_{i=0}^{k+2} \binom{k+2}{i} \underbrace{(\mathrm{X}^2-1)^{(i)}}_{=0 \text{ si } i \geqslant 2} \left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k+2-i)}.$$

Il reste

$$\begin{aligned} ((\mathrm{X}^2-1)^{k+1})^{(k+2)} &= \binom{k+2}{0}(\mathrm{X}^2-1)\left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k+2)} + \binom{k+2}{1}(\mathrm{X}^2-1)'\left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k+1)} + \binom{k+2}{2}(\mathrm{X}^2-1)''\left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(} \\ &= (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_k'' + (k+2)2\mathrm{X}\mathrm{P}_k' + (k+2)(k+1)\mathrm{P}_k. \end{aligned}$$

On a par ailleurs $\left((\mathrm{X}^2-1)^{k+1}\right)' = 2\mathrm{X}(k+1)(\mathrm{X}^2-1)^k$. La formule de Leibniz donne alors

$$((\mathrm{X}^2-1)^{k+1})^{(k+2)} = (2(k+1)\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)^k)^{(k+1)} = 2(k+1)\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(\mathrm{X})^{(i)}}_{=0 \text{ si } i \geqslant 2} \left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k+1-i)}.$$

Il reste

$$((\mathrm{X}^2-1)^{k+1})^{(k+2)} = 2(k+1)\left(\binom{k+1}{0}\mathrm{X}\left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}1\left((\mathrm{X}^2-1)^k\right)^{(k)}\right) = 2(k+1)\mathrm{X}\mathrm{P}_k' + 2(k+1)^2\mathrm{P}_k.$$

En soustrayant les deux égalités, il reste

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_k'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}_k' - k(k+1)\mathrm{P}_k = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi(\mathrm{P}_k) = -k(k+1)\mathrm{P}_k.$$

Exercice 9. (**) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dire que A est *symétrique positive* signifie qu'elle est symétrique et qu'elle vérifie la propriété

$$\forall \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} \geqslant 0.$$

Dans la suite, on suppose que la matrice A est symétrique.

a. On suppose que la matrice A est symétrique positive. Montrer que ses valeurs propres sont toutes positives.

b. Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de la matrice A sont toutes positives. À l'aide du théorème spectral, prouver que A est symétrique positive.

c. Trouver une matrice B symétrique positive telle que $B^2 = A$.

d. (***) Réciproquement, soit C une matrice symétrique positive telle que $C^2 = A$. Justifier que C laisse stables les espaces propres de A. Montrer que les endomorphismes des espaces propres de A induits par C sont symétriques positifs puis en déduire l'égalité $C = B$.

Solution de l'exercice 9. a. Soit λ une valeur propre de A. Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

La relation $A \cdot U = \lambda U$ donne ensuite $U^T \cdot A \cdot U = \lambda U^T \cdot U = \lambda ||U||^2$. Le vecteur U est non nul donc $||U||^2 > 0$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{U^T \cdot A \cdot U}{||U||^2} \geqslant 0.$$

---

b. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons λ_k la valeur propre de A associée au vecteur propre U_k.

Soit U un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Introduisons sa décomposition dans la base $\mathcal{P}$

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i P_i$$

et rappelons que les coefficients de cette décomposition sont donnés par l'identité $u_i = U^T \cdot P_i$.

Le calcul donne

$$A \cdot U = \sum_{i=1}^{n} u_i A P_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i P_i$$

puis

$$U^T \cdot A \cdot U = \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i \underbrace{U^T \cdot P_i}_{=u_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i)^2 \geqslant 0.$$

---

c. Notons P la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $P_1, \ldots, P_n$. On sait que P est une matrice orthogonale et que $P^{-1}AP$ est la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Posons alors $B = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$. Le calcul donne directement $B^2 = A$.

Par ailleurs, le fait que $P^{-1} = P^T$ donne que B est symétrique. Enfin, les valeurs propres de B sont les $\sqrt{\lambda_i}$, qui sont positifs, donc B est symétrique positive.

---

d. Remarquons que $CA = C^3 = AC$.

Soit λ une valeur propre de A. Soit $U \in E_\lambda(A)$. On a alors

$$ACU = CAU = C\lambda U = \lambda CU \qquad \text{donc} \qquad CU \in E_\lambda(A),$$

ce qui prouve que $E_\lambda(A)$ est stable par C. Notons φ l'endomorphisme de $E_\lambda(A)$ défini par $U \mapsto CU$.

Cet endomorphisme est symétrique [1] donc il existe une base orthonormale $(F_1, \ldots, F_s)$ de $E_\lambda(A)$ formée de vecteurs propres de φ.

1. Vérification laissée en exercice.

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, notons μ_i la valeur propre de φ associée à F_i. On a alors $CF_i = \mu_i F_i$.
On en déduit l'égalité $AF_i = \mu_i CF_i = \mu_i^2 F_i$ or $AF_i = \lambda F_i$ et $F_i \neq 0$ donc $\mu_i^2 = \lambda$.
Par ailleurs, les valeurs propres de C sont positives donc $\mu_i \geqslant 0$ donc $\mu_i = \sqrt{\lambda}$.

La matrice de φ dans la base $(F_1, \ldots, F_s)$ est donc $\sqrt{\lambda} I_s$, si bien que φ est l'endomorphisme $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a prouvé l'égalité $CP_i = \sqrt{\lambda_i} P_i$, ce qui prouve l'égalité

$$P^{-1}CP = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad \text{puis} \qquad C = B.$$

Exercice 10. (**) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dire que A est *symétrique définie positive* signifie qu'elle est symétrique et qu'elle vérifie la propriété

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad U^T \cdot A \cdot U > 0.$$

a. Montrer que A est symétrique définie positive si, et seulement si, elle est symétrique et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

b. Montrer que A est symétrique définie positive si, et seulement si, elle est symétrique positive et inversible.

c. Montrer qu'il existe une unique matrice B symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

d. Soient A et S deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique définie positive.
Prouver que AS est diagonalisable (on prouvera que AS est semblable à BSB).

e. On reprend les notations de la question précédente et on suppose que la matrice S est symétrique positive. On introduit les valeurs propres de A, numérotées dans l'ordre croissant (au sens large, en respectant les multiplicités)

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

On introduit de même les valeurs propres de S

$$\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n.$$

Prouver alors que les valeurs propres de la matrice AS appartiennent au segment $[\lambda_1\mu_1, \lambda_n\mu_n]$.

Solution de l'exercice 10. a. Dans un premier temps, on suppose que A est symétrique définie positive.
Soit λ une valeur propre de A. Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
La relation $A \cdot U = \lambda U$ donne ensuite $U^T \cdot A \cdot U = \lambda U^T \cdot U = \lambda ||U||^2$. Le vecteur U est non nul donc $||U||^2 > 0$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{U^T \cdot A \cdot U}{||U||^2} > 0.$$

Réciproquement, on suppose maintenant que A est symétrique et que les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.
D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons λ_k la valeur propre de A associée au vecteur propre U_k.

Soit U un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Introduisons sa décomposition dans la base $\mathcal{P}$

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i P_i$$

et rappelons que les coefficients de cette décomposition sont donnés par l'identité $u_i = U^T \cdot P_i$.

Le calcul donne

$$A \cdot U = \sum_{i=1}^{n} u_i AP_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i P_i$$

puis

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i \underbrace{\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{P}_i}_{=u_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i)^2 \geqslant 0.$$

Le vecteur U n'étant pas nul, on peut sélectionner un indice $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_j \neq 0$. On a alors

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} \geqslant \lambda_j (u_j)^2 > 0.$$

La matrice A est symétrique définie positive.

---

b. Une matrice symétrique positive est définie positive si et seulement si elle n'admet pas 0 pour valeur propre, ce qui revient à dire qu'elle est inversible.

---

c. Démonstration identique à celle de l'exercice précédent.

---

d. On reprend la notation B de la question précédente. On a alors

$$\mathrm{AS} = \mathrm{BBS} = \mathrm{B}(\mathrm{BSB})\mathrm{B}^{-1},$$

si bien que AS est semblable à BSB. Cette dernière est une matrice symétrique réelle donc elle est semblable à une matrice diagonale.

On en déduit que AS est semblable à une certaine matrice diagonale, ce qui revient à dire qu'elle est diagonalisable.

---

e. Les valeurs propres de AS sont les mêmes que celles de BSB. Soit ν l'une d'entre elles. Soit U un vecteur propre de BSB associé à la valeur propre ν.

Comme on l'a vu précédemment, on a l'égalité

$$\nu = \frac{\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{U}}{\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}}.$$

Rappelons que B est symétrique, ce qui donne $\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{BU})^{\mathrm{T}}$ puis

$$\nu = \frac{(\mathrm{BU})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{S} \cdot (\mathrm{BU})}{\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}}.$$

Le théorème spectral permet de considérer une base orthonormale $(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur Q_i soit un vecteur propre de S pour la valeur propre μ_i.

Introduisons la décomposition de BU dans cette base

$$\mathrm{BU} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{Q}_i.$$

On a alors $(\mathrm{BU})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{S} \cdot (\mathrm{BU}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i (c_i)^2$, ce qui donne l'encadrement

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{n} (c_i)^2 \leqslant (\mathrm{BU})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{S} \cdot (\mathrm{BU}) \leqslant \mu_n \sum_{i=1}^{n} (c_i)^2.$$

Par ailleurs, la famille $(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n)$ étant une base orthonormale, on reconnaît dans $\sum\limits_{i=1}^{n} (c_i)^2$ le carré de la norme de BU, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i)^2 = (\mathrm{BU})^{\mathrm{T}}(\mathrm{BU}) = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U}.$$

Le même calcul donne l'encadrement

$$\lambda_1 ||\mathrm{U}||^2 \leqslant \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} \leqslant \lambda_n ||\mathrm{U}||^2.$$

La positivité de μ_1 et de μ_n donne alors finalement l'encadrement

$$\lambda_1 \mu_1 ||\mathrm{U}||^2 \leqslant (\mathrm{BU})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{S} \cdot (\mathrm{BU}) \leqslant \lambda_n \mu_n ||\mathrm{U}||^2.$$

En divisant par $||\mathrm{U}||^2$, qui est strictement positif, il reste $\lambda_1 \mu_1 \leqslant \nu \leqslant \lambda_n \mu_n$.
