PC* — mathématiques **mardi 1er décembre 2015**
Devoir surveillé n° 4 **durée : 4 heures**

Polynômes de matrices

On fixe un entier n strictement positif. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on définit une matrice P(M) de la manière suivante : si P s'écrit

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k,$$

alors la matrice P(M) est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenu en remplaçant le symbole X par M, c'est-à-dire

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{M}^k = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{M} + \cdots + a_d \mathrm{M}^d.$$

On admet l'identité suivante

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in (\mathbb{C}[\mathrm{X}])^2, \qquad (\mathrm{P} \times \mathrm{Q})(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{Q}(\mathrm{M}).$$

En particulier, pour une matrice M donnée, on en déduit que les polynômes en M sont des matrices qui commutent deux à deux.

Étant donné une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un polynôme complexe P, dire que P est *un polynôme annulateur de* M signifie que la matrice P(M) est nulle. Ainsi, le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice carrée.
L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice carrée M est noté Ann(M).

On rappelle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le *polynôme caractéristique* de cette matrice est le polynôme χ_{M} dont la fonction polynomiale associée est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad \chi_{\mathrm{M}}(t) = \mathrm{dét}(t\mathrm{I}_n - \mathrm{M}).$$

Partie I — structure de l'ensemble des polynômes annulateurs

Dans cette partie, on fixe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 1. Vérifier que l'ensemble Ann(M) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

Question 2. Pour tout élément P et Ann(M) et tout élément Q de $\mathbb{C}[X]$, prouver que $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ est un élément de Ann(M).

Question 3. Justifier que la famille $(\mathrm{M}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est liée. En déduire que Ann(M) possède au moins un élément non nul.

Question 4. Soient A et B deux éléments non nuls de Ann(M). On note Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B. Montrer que R est un élément de Ann(M).

Question 5. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \ ; \ \exists \mathrm{P} \in \mathrm{Ann}(\mathrm{M}),\ \deg(\mathrm{P}) = k\}$ possède un plus petit élément. Ce minimum est noté d.

Question 6. Montrer que M possède un polynôme annulateur unitaire[1] de degré d. Montrer de plus qu'un tel polynôme est unique.

Ce polynôme sera noté μ_{M}. C'est le *polynôme minimal* de la matrice M.

Question 7. Montrer que l'ensemble Ann(M) est l'ensemble $\{\mu_{\mathrm{M}} \times \mathrm{Q} \ ; \ \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\}$.

Question 8. Trouver le polynôme minimal de la matrice nulle et celui de la matrice identité I_n.

1. On rappelle qu'un polynôme *unitaire* est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

Partie II — cas des matrices 2 × 2

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. On considère la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Question 9. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice M.

Question 10. Vérifier que le polynôme χ_{M} est un polynôme annulateur de la matrice M.

Question 11. On suppose que M n'est pas un multiple de I_2. Montrer alors que χ_{M} est le polynôme minimal de la matrice M.

Partie III — polynômes interpolateurs de Lagrange

Dans cette partie, on fixe un entier k strictement positif. On introduit des éléments $x_0, \dots, x_k$ de $\mathbb{C}$ deux à deux distincts et on forme le polynôme

$$\mathrm{P} = \prod_{j=0}^{k} (\mathrm{X} - x_j).$$

Pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$, on introduit le polynôme

$$\mathrm{L}_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_i - x_j}.$$

Enfin, on définit une application $\varphi : \mathbb{C}_k[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}^{k+1}$ par la formule

$$\varphi(\mathrm{Q}) = (\mathrm{Q}(x_0), \dots, \mathrm{Q}(x_k)).$$

Question 12. Justifier que φ est un isomorphisme.

Question 13. Pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$, calculer le degré du polynôme L_i et vérifier que son coefficient dominant est égal à $1/\mathrm{P}'(x_i)$.

Question 14. Pour tout couple (i,j) d'indices dans $[\![0,k]\!]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Question 15. Reconnaître la famille $(\varphi(\mathrm{L}_0), \dots, \varphi(\mathrm{L}_k))$. En déduire que la famille $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_k)$ est une base de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$.

Question 16. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$, prouver l'égalité

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Q}(x_i)\mathrm{L}_i.$$

Question 17. Écrire la matrice représentative de la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^k)$ de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ relativement à la base $\mathcal{L}$. Donner sans démonstration la valeur du déterminant de cette matrice.

Question 18. Pour tout élément $b = (b_0, \dots, b_k)$ de $\mathbb{C}^{k+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ qui vérifie les égalités

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \qquad \mathrm{Q}(x_j) = b_j.$$

On dit que ce polynôme est solution d'un problème d'interpolation.

Partie IV — décomposition de noyaux

On conserve les notations de la partie précédente. De plus, on considère une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cette partie est de prouver l'égalité suivante

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n).$$

Question 19. Pour tout indice i dans $[\![0, k]\!]$, prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_i\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M}))$.

On en déduit l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M})).$$

Le but de cette partie est donc naturellement de prouver l'inclusion réciproque. Pour cela, on procède par analyse-synthèse. On prend un élément U de Ker(P(M)) et on suppose qu'on connaît des éléments

$$\mathrm{U}_0 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n), \quad \mathrm{U}_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n), \quad \ldots, \mathrm{U}_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n)$$

vérifiant l'égalité $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots \mathrm{U}_k$.

Question 20. Pour tout entier naturel p, prouver l'égalité

$$\mathrm{M}^p\mathrm{U} = (x_0)^p\mathrm{U}_0 + (x_1)^p\mathrm{U}_1 + \cdots + (x_k)^p\mathrm{U}_k.$$

Question 21. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, en déduire l'égalité

$$\mathrm{Q}(\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{Q}(x_0)\mathrm{U}_0 + \mathrm{Q}(x_1)\mathrm{U}_1 + \cdots + \mathrm{Q}(x_k)\mathrm{U}_k.$$

Question 22. Pour tout indice i dans $[\![0, k]\!]$, prouver l'égalité $\mathrm{U}_i = \mathrm{L}_i(\mathrm{M})\mathrm{U}$.

Ainsi se termine l'analyse du problème : il existe au plus un $(k+1)$-uplet $(\mathrm{U}_0, \ldots, \mathrm{U}_k)$ réalisant une décomposition de U comme ci-dessus.

Question 23. Réaliser la synthèse et prouver finalement l'égalité annoncée au début de cette partie.

Question 24. Dans cette question, on suppose que P est un polynôme annulateur de la matrice M. Montrer alors que la matrice M est diagonalisable, ce qui signifie qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de la matrice M.

Exercice

Soit p un entier strictement positif. On se donne une matrice B de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ ainsi que deux vecteurs colonnes C et D de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Soit a un nombre réel différent de $\mathrm{D}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{C}$. On construit la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{D}^\mathrm{T} & a \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse.

b. Si on fait maintenant l'hypothèse $a = \mathrm{D}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{C}$, la matrice A est-elle encore inversible ?
