Devoir surveillé n° 7 — piste rouge — statistiques

Mars 2021

Mathématiques — PC* — lycée Henri Poincaré

1. À propos du sujet
2. Les notes
3. Barème détaillé

À propos du sujet

Cet énoncé a été posé en 2020 au concours commun Mines-Ponts en MP.

Les thèmes abordés sont assez peu nombreux : probabilités, séries entières, séries numériques.

À propos du sujet

Cet énoncé a été posé en 2020 au concours commun Mines-Ponts en MP.

Les thèmes abordés sont assez peu nombreux : probabilités, séries entières, séries numériques.

À propos du sujet

Ce sujet est long et les questions sont de difficulté très variée. Les préliminaires sont principalement des questions de cours ou des calculs de cours. Les raisonnements probabilistes sont assez difficiles et la fin du sujet est infaisable (il aurait fallu découper chaque question en quatre ou cinq questions).

C'est essentiellement la première partie qui a fait la différence.

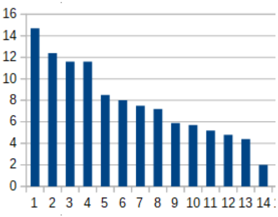
À propos de la notation

Sur chaque copie, pour chaque question, je mets une note entre 0 et 4, avec une précision de 0,5, qui est mon évaluation de la proportion réussie de la question.

Ces « pourquatrages » sont alors reportés dans un tableur et pondérés, selon des coefficients détaillés dans les prochaines pages, pour constituer une note brute. Les notes brutes sont divisées par un coefficient de mon choix et arrondies au dixième par excès.

Pour ce devoir, le cumul brut est de 202 points — je n'ai pas pris la peine de prévoir un barème pour les deux dernières questions. J'ai choisi un diviseur de 4.

La répartition des notes



Moyenne : 7,83. Écart-type : 3,60. Médiane : 7,35.

Barème de la partie A

Q1	Q2	Q3a	Q3b
1	1	2,5	2,5
19,6 %	58,9 %	29,5 %	26,8 %

Q4a	Q4b	Q4c	Q5a	Q5b
1	3	1	1	1,5
92,9 %	0,0 %	39,3 %	64,3 %	42,9 %

Maximum théorique : 58.
Moyenne de la classe : 19,20.
Meilleur total : 37.

Barème de la partie B

Q6a	Q6b	Q6c	Q6d	Q7a	Q7b
0,5	0,5	1,5	1	2,5	1
17,9 %	57,1 %	22,3 %	41,1 %	18,8 %	19,6 %

Q8a	Q8b	Q9	Q10	Q11a	Q11b	Q12
2	1,5	2,5	1	4	1,5	2
1,8 %	10,7 %	0,9 %	3,6 %	1,8 %	3,6 %	10,7 %

Maximum théorique : 86.
Moyenne de la classe : 9,52.
Meilleur total : 20.

Barème de la partie C

Q13	Q14a	Q14b	Q14c	Q15
2	1,5	1	2,5	1
18,8 %	5,4 %	1,8 %	0,0 %	0,0 %

Maximum théorique : 32.
Moyenne de la classe : 1,89.
Meilleur total : 5,5.

À propos de la partie A

Question 1. Le produit de Cauchy n'est pas reconnu.

Question 2. L'équivalent de Stirling n'est pas toujours connu. Il y a parfois des erreurs de calcul par confusion entre $(2n)!$ et $2n!$.

Question 3. La méthode des rectangles est globalement oubliée. C'est une technique essentielle dans le maniement d'inégalités.

Question 5. Le binôme généralisé est inégalement connu. Il est étonnant que sa bonne connaissance ne débouche pas toujours sur la réussite au calcul qui suit.

À propos de la partie B

Question 6. Gros malentendu sur les séries de référence du cours de probabilités. La définition d'une probabilité entraîne que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.
Cela donne bien la convergence de la série des $\mathbb{P}(R = n)$ mais pas celle de la série de $\mathbb{P}(S_n = 0_d)$.

Cette convergence a été affirmée dans plusieurs copies et cette erreur n'a pas été rectifiée au moment d'aborder la question 10, qui envisage la divergence de cette série. Il faut saisir les occasions de se rattraper aux branches quand l'énoncé les offre.

À propos de la partie B

Question 7. La question 7 est difficile et elle aurait mérité des questions intermédiaires. Je vous invite à bien étudier le raisonnement qui mène à cette formule.

Question 8. La difficulté de cette question réside dans la gestion des indices. La principale règle à retenir est que les sommes qui interviennent dans le théorème du produit de Cauchy commencent toutes à l'indice 0. Pour appliquer ce théorème à des séries commençant à l'indice 1, il faut intercaler provisoirement le terme d'indice 0 qui manque.
Beaucoup d'erreurs de méthode sur la deuxième partie de la question : la limite de F est évoquée sans que son existence ne soit justifiée ; le nombre $G(1)$ est utilisé en guise de limite de G en 1 sans mentionner la continuité.

À propos de la partie B

Question 9. Question difficile d'interversion de limites. Comme signalé dans le cours sur les séries de fonctions, aucun théorème du cours ne permet ce genre d'interversion en cas de limite infinie. La méthode présentée en classe repose sur une démonstration par l'absurde.
L'énoncé suggère une méthode plus epsilonesque. Plusieurs d'entre vous n'ont pas vu que c'était une indication et ont cru que c'était une deuxième question, ce qui a donné des réponses étranges.

À propos de la partie B

Question 11. Encore une question très difficile, même avec mon indication. Là encore, c'est un raisonnement que je vous encourage à étudier.

Question 12. Le fait que $\mathbb{P}(R > i)$ tende vers $\mathbb{P}(R = +\infty)$ quand i tend vers $+\infty$ n'a presque jamais été justifié alors que c'est la clé de cette question. Ceci repose sur la continuité décroissante.

À propos de la partie C

Question 13. L'argument de parité pour $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ a été vu. Pour $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$, personne n'a fait explicitement référence à une loi binomiale. Je n'ai lu que des bribes d'explications sans queue ni tête.
Le cours, toujours le cours !

Question 14. Cette question est un rendez-vous raté : il suffisait de récolter les résultats de questions antérieures pour tout résoudre.

À propos de la partie D

Question 16. La première partie est généralement comprise mais il manque presque toujours l'argument $b_{n-k} \geqslant 0$ pour passer de $a_k \geqslant a_n$ à $a_k b_{n-k} \geqslant a_n b_{n-k}$.
La deuxième partie n'a pas été réussie mais elle n'est pas si compliquée. Je vous encourage à étudier la démarche.

Question 17. Le recours au théorème des gendarmes était sûrement délicat. Ça n'explique pas les tentatives ultra fausses que j'ai eu le malheur de lire.