PC* — mathématiques **avril 2021**
Problème de révision n° 3

Matrices stochastiques

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

On considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients de cette matrice sont tous *strictement* positifs. On suppose également que sur chaque ligne de cette matrice, la somme des coefficients vaut 1. En formule, cette deuxième hypothèse s'écrit

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On note U le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer le produit AU. En déduire que 1 est une valeur propre de la matrice A.

2. Dans cette question, on étudie les valeurs propres complexes de la matrice A.

a. On considère une matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose qu'elle n'est pas inversible.

On considère un élément X non nul de Ker(B), que l'on note

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier k dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant l'égalité

$$|x_k| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Prouver l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} |b_{k,j}|.$$

b. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A. En appliquant le résultat précédent à la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$, obtenir l'inégalité

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$$

puis en déduire la majoration

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

c. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A. On suppose que λ est de module 1 et on note θ un argument de λ. On obtient donc l'inégalité

$$|a_{k,k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}.$$

En déduire l'égalité $\cos(\theta) = 1$ puis donner la valeur de λ.

3. Prouver que 1 est une valeur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ et que les espaces propres $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ ont la même dimension (on pourra utiliser le théorème du rang).

4. Dans cette question, on étudie l'espace propre $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$.

Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \dots, v_n$ ses coefficients. On note $|\mathrm{V}|$ le vecteur colonne de coefficients $|v_1|, \dots, |v_n|$.

a. Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \dots, v_n$ ses coefficients. Pour tout indice i entre 1 et n, prouver l'inégalité

$$|v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|.$$

b. À l'aide de la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$, prouver que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

c. Prouver l'égalité ${}^t\mathrm{A} \times |\mathrm{V}| = |\mathrm{V}|$.

d. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, prouver que $|v_i|$ est strictement positif.

On a donc prouvé que tout vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$ a ses coefficients tous non nuls.

e. Soient X et Y deux éléments de l'espace propre $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$.

Montrer que le vecteur $y_1\mathrm{X} - x_1\mathrm{Y}$ est nul.

f. Prouver que $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ est de dimension 1.

g. Prouver que $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ admet un vecteur directeur W dont les coordonnées $w_1, \dots, w_n$ sont strictement positives et vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

5. Dans cette question, on interprète la matrice A et le vecteur colonne W en termes probabilistes.

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Un personnage voyage entre n villes, numérotées de 1 à n. Chaque jour, il passe d'une ville à une autre ou il reste sur place. Ses déplacements sont fixés aléatoirement. Plus précisément, si au jour k, le personnage est dans la ville i, alors la probabilité qu'il soit dans la ville j au jour $(k+1)$ vaut $a_{i,j}$.

Pour modéliser cette expérience, on fixe un entier N et on étudie les positions du personnage entre le jour 0 et le jour N. Pour tout k dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, on note X_k le numéro de la ville où se trouve le personnage au jour k. On suppose que $\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout k dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, on code la loi de la variable aléatoire X_k par le vecteur ligne

$$\mathrm{L}_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) & \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 2) & \cdots & \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = n) \end{pmatrix}.$$

a. Interpréter les $a_{i,j}$ comme des probabilités conditionnelles. Expliquer pourquoi les hypothèses sur la matrice A sont pertinentes pour la modélisation proposée.

b. Pour tout k dans $[\![0, \mathrm{N}-1]\!]$, prouver la relation $\mathrm{L}_{k+1} = \mathrm{L}_k \times \mathrm{A}$.

c. Prouver qu'il existe une manière (et une seule) de choisir la loi de X_0 pour laquelle les variables aléatoires $\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ ont toutes la même loi.