Mathématiques — préparation à l'oral

Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Résoudre le système A069-17

$$x+y+z=1, \qquad xyz=1, \qquad |x|=|y|=|z|=1$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les points d'affixes respectives z, z^2, z^3. 0664-17

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que l'orthocentre du triangle ABC soit l'origine.

Exercice 3. Trouver les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \mathrm{i}$. 0375-17

Exercice 4. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des nombres complexes tous distincts. Soient $y_0, \ldots, y_n, z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes quelconques. 0770-17

Montrer qu'il existe un unique polynôme H dans $\mathbb{C}_{2n+1}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathrm{H}(x_k) = y_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}'(x_k) = z_k.$$

Exercice 5. Soit un entier $n \geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$. 0665-17

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$. 0663-17

Exercice 7. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Q}(0) = 0$. 0385-17

Exercice 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n à coefficients entiers tel que 0162-17

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{P}_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

Soit $a \in \mathbb{Q}$. On suppose que $\cos(a\pi)$ est rationnel. Montrer que $2\cos(a\pi)$ est entier.

Exercice 9. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})^2$. A006-17

Exercice 10. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des nombres réels positifs non tous nuls. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. S001-21

Au moyen de la fonction $f : t \mapsto \mathrm{P}(t)/t^n$, montrer que P possède exactement une racine dans $]0, +\infty[$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 11. Soient $z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((\mathrm{X} - z_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. 0669-17

Exercice 12. Soient $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_q)$ et $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_p)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. 0778-17

Montrer que la famille $(\mathrm{Y}_i \times \mathrm{X}_j^{\mathrm{T}})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. 0670-17

a. Montrer que l'égalité $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = n$ équivaut à l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{F}$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{G}$.

b. Dans cette question, on prend $n = 3$; le sous-espace F est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G est la droite dirigée par le vecteur $(1, -1, 0)$. Déterminer alors un endomorphisme u solution du problème de la question précédente.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. A002-17

Prouver l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. A017-17

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$?

2. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent. 0381-17

Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs et préciser leurs axes.

Exercice 17. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. A034-17

Prouver l'implication $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 18. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. 0775-17

Montrer l'existence d'un entier p strictement positif tel que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ soient supplémentaires dans E.

Exercice 19. On considère l'endomorphisme $\Delta : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. A035-17

a. Déterminer le noyau de Δ.

b. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par Δ. Déterminer son image.

Matrices

Exercice 20. On définit les matrices A072-17

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les inverses de ces matrices. Trouver un lien entre N et M^2.

Exercice 21. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$. A052-17

Trouver toutes les matrices qui sont semblables à A et qui commutent avec elle.

Exercice 22. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$. 0783-17

a. Déterminer le rang de M.

b. Calculer M^{-1} en cas d'existence.

Exercice 23. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On se donne une ligne $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et une colonne $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose 0782-17

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathrm{L} \\ \mathrm{C} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'inversibilité de A équivaut à $\alpha - \mathrm{LC}$ et déterminer A^{-1} le cas échéant.

Exercice 24. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A^T sont semblables. 0776-17

Exercice 25. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables. 0509-17

Exercice 26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$. 0507-17

Exercice 27. Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^T commute avec M. Montrer que M est diagonale. 0387-17

Exercice 28. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. 0397-17

Montrer que l'inversibilité de la matrice $A + Y \times X^T$ équivaut à $X^T \times A^{-1} \times Y \neq -1$.

Déterminant

Exercice 29. 1. On considère des polynômes unitaires $P_0, \ldots, P_{n-1}$ tels que pour tout indice k concerné, le polynôme P_k soit de degré k. Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. A071-17
Calculer le déterminant de la matrice $(P_{j-1}(a_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)x_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 30. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$. 0396-17

Montrer l'égalité $\mathrm{dét}(M) = \mathrm{dét}(I_n + AB)$.

Exercice 31. (**) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que B est nilpotente. 0817-19
Montrer que $\mathrm{dét}(A + B) = \mathrm{dét}(A)$.

Exercice 32. Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que les matrices $A, B, A + B, A - B$ ont un déterminant nul. 0436-19
Montrer pour tout x réel l'égalité $\mathrm{dét}(xA + B) = 0$.

Exercice 33. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$. 0819-19

Réduction

Exercice 34. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. S002-21

1. Montrer que le spectre de M est $\{0\}$.

2. Calculer $\mathrm{dét}(M + I_n)$.

Exercice 35. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \lambda_i / \lambda_j$. 0037-17

Exercice 36. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 0407-17

Déterminer la dimension de $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ ; \ AB = BA\}$.

Exercice 37. Trouver les racines carrées de $\mathrm{Diag}(1, 2, -1, -1)$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. 0794-17

0681-17

Exercice 38. Soient a, b, c des éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Étudier la diagonalisabilité de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1/a & 0 & c \\ 1/b & 1/c & 0 \end{pmatrix}$.

0793-17

Exercice 39. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A_n possède exactement une valeur propre réelle strictement positive.

b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?

Exercice 40. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + n\mathrm{X}\mathrm{P}$. 0796-17

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Soit P un vecteur propre de Φ. Montrer que les racines complexes de P sont dans $\{-1\ ;\ 1\}$. Déterminer le degré de P.

c. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 41. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par A018-17

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note d_n le déterminant de la matrice A_n.

1. Montrer la relation $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$.

2. Exprimer d_n en fonction de n.

3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

4. La matrice A_n admet-elle 0 pour valeur propre ?

Exercice 42. Soit M une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cela signifie que ses coefficients sont positifs et que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1). A014-17

a. Vérifier que 1 est une valeur propre de M.

b. Montrer que les valeurs propres de M ont un module majoré par 1.

c. Soit λ une valeur propre de M de module 1. Montrer que λ vaut 1.

Exercice 43. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$ est la matrice nulle. A054-17

Exercice 44. Pour tout polynôme réel P, on pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^3 - \mathrm{X})\mathrm{P}' - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}$. A012-17

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 45. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit : la première ligne, la dernière ligne et la première colonne sont constituées de 1, les autres coefficients de la dernière colonne valent 2, les autres coefficients sont nuls. A027-17

Déterminer le rang de A et son image. Prouver que A est diagonalisable.

A036-17

Exercice 46. Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble de toutes les matrices de cette forme.

1. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1,0)$. Calculer J^2 puis exprimer $\mathrm{M}(a,b,c)$ en fonction de $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Montrer également que E est stable par produit.

3. Vérifier que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et exprimer son spectre à l'aide de $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$. Trouver une base de diagonalisable pour J.
En déduire que $\mathrm{M}(a,b,c)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

4. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{M}(a,b,c)$ sont réelles si, et seulement si, les coefficients b et c sont égaux.

5. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{M}(a,b,c)$ et on suppose que ce n'est ni l'identité ni l'application nulle.
À quelles conditions sur (a,b,c) l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ est-il un projecteur ? Dans ce cas, préciser son noyau et son image.

A038-17

Exercice 47. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A et B sont diagonalisables.

b. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ n'est pas diagonalisable.

c. On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

d. Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

e. Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

f. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables. Déterminer l'intersection $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}$. En déduire l'inégalité

$$\dim(\mathrm{F}) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

g. Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

h. Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

Exercice 48. Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1. A045-17

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \mathrm{I})^2)$.

A066-17

Exercice 49. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

Exercice 50. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit A une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A057-17

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 51. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On fait l'hypothèse $g^2-5f+6\mathrm{Id} = 0$. 0791-17

Montrer que $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 52. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 = 0$. A068-17

a. Soit λ une valeur propre de A. Prouver l'égalité $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.

b. Calculer la trace de A.

Exercice 53. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On fait les hypothèses 0803-17

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0, \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2, \quad \mathrm{A}^n \neq 0.$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Espaces euclidiens

Exercice 54. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On note λ la plus petite valeur propre de u et μ la plus grande. 0420-17

Pour tout vecteur x de E, montrer l'encadrement $\lambda_1 ||x||^2 \leqslant (u(x)|x) \leqslant \lambda_n ||x||^2$.

Exercice 55. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. 0702-17

Démontrer l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 56. Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. 0698-17

Exercice 57. On considère une matrice M décomposée par blocs sous la forme $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. 0817-17

On suppose que M est une matrice orthogonale. Montrer l'égalité $|\mathrm{dét}(\mathrm{A})| = |\mathrm{dét}(\mathrm{D})|$.

Exercice 58. Soient U et V deux éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $(\mathrm{U}+5\mathrm{V})/6$ soit orthogonale. Généraliser. 0815-17

Exercice 59. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B} - 2\mathrm{A}\mathrm{B}) = 0$. Montrer que B est la transposée de A. 0814-17

Exercice 60. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on pose A085-17

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 61. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est *définie positive*, ce qui signifie qu'elle vérifie la propriété suivante A024-17

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad X^T \cdot A \cdot X > 0.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

2. On note λ la plus grande valeur propre de A et μ la plus petite.
On fixe un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on veut démontrer l'encadrement

$$||X||^4 \leqslant (X|AX)(X|A^{-1}X) \leqslant \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu}||X||^4.$$

On considère la fonction polynomiale $f : s \mapsto (X|AX)s^2 - (\lambda+\mu)(X|X)s + \lambda\mu(X|A^{-1}X)$.

a. On pose $N = -A + (\lambda+\mu)I - \lambda\mu A^{-1}$. Vérifier que N est une matrice symétrique à valeurs propres positives.

b. Déterminer le signe de $f(0)f(1)$.

c. Conclure.

Exercice 62. On rappelle que la formule $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. A029-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $||P_n||^2$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad (T|P) = P(0).$$

Exercice 63. Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. A042-17

1. Montrer que $(P|Q)$ est bien défini.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on admet l'existence d'un polynôme T_n vérifiant l'identité

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 64. Soient a et b deux vecteurs d'un espace euclidien E. On suppose que ces deux vecteurs sont de norme 1 et qu'ils forment une famille libre. A056-17
On définit l'endomorphisme $f : x \mapsto (x|a)b + (x|b)a$ de E.

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 65. Pour toute matrice symétrique réelle A, prouver l'inégalité $\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant \mathrm{rg}(A)\mathrm{tr}(A^2)$. A061-17

Exercice 66. Soit M une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. 0422-17

a. Montrer l'existence d'une matrice orthogonale O et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = OT$.

b. Montrer la majoration $\mathrm{dét}(M)^2 \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2\right)$.

A075-17

Exercice 67. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer la majoration $\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$.

A082-17

Exercice 68. Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Dire que f est *stabilisant* signifie qu'il vérifie l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad (f(x)|x) = ||x||^2.$$

1. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que h est stabilisant.

2. Soit f un endomorphisme stabilisant de $\mathbb{R}^3$. On pose $g = f - \mathrm{Id}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, prouver l'égalité $(g(x)|x) = 0$.

b. En utilisant le polynôme caractéristique de g, prouver que g possède au moins une valeur propre.

c. Soit λ une valeur propre de g. Montrer que λ vaut 0.

3. On reprend les notations de la question 2. On suppose de plus que g n'est pas l'application nulle.

a. Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^3$, prouver l'égalité $(g(x)|y) + (g(y)|x) = 0$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont orthogonaux.

c. Soit e_1 un vecteur de norme 1 appartenant au noyau de g. Soit e_2 un vecteur de norme 1 appartenant à l'image de g. On pose

$$e_3 = \frac{g(e_2)}{||g(e_2)||}.$$

Montrer que la famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

4. On reprend les hypothèses et les notations de la question 3.

a. Montrer l'égalité $(g(e_3)|e_2) = -||g(e_2)||$.

b. Prouver l'égalité $g(e_3) = -||g(e_2)||\, e_2$.

c. En déduire la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$.

d. Montrer que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique.

5. Réciproquement, on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice canoniquement associée à $f - \mathrm{Id}$ soit antisymétrique. Montrer que f est stabilisant.

Espaces vectoriels normés

0824-17

Exercice 69. Soit $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour toute partie A non vide de E et tout vecteur x de E, on pose

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf\{||x - y||\ ;\ y \in \mathrm{A}\}.$$

a. Soit F un fermé non vide de E. Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer que l'égalité $d(x, \mathrm{F}) = 0$ équivaut à ce que x appartienne à F.

b. Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.

Exercice 70. On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose A048-17

$$\mathrm{N}(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty.$$

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Prouver la majoration $||f||_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$.

c. Existe-t-il $\lambda > 0$ tel que $\forall f \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(f) \leqslant \lambda ||f||_\infty$?

Exercice 71. Pour tout vecteur $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{N}(u) = \sup\{|x + ty| \ ;\ t \in [0,1]\}$. 0920-16

a. Prouver l'égalité $\mathrm{N}(u) = \max(|x|, |x + y|)$.

b. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

c. On note B la boule unité fermée de N. Trouver le plus petit disque euclidien contenant B et le plus grand disque euclidien contenu dans B.

Suites numériques

Exercice 72. On fixe $u_0 > 0$ puis on pose $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0430-17

Exercice 73. Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n. 1103-17

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 74. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$. 0513-17

a. Montrer que M_n admet trois valeurs propres réelles $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ telles que

$$\alpha_n < 0 < \beta_n < 2 < \gamma_n.$$

b. Étudier le comportement asymptotique des trois suites réelles ainsi définies (limites, équivalents).

Exercice 75. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = n(x_n - n)$. 0429-17

Montrer que la relation $x_n = \mathcal{O}(n)$ équivaut à $x_1 = 2\mathrm{e}$.

Exercice 76. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$. A086-19

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 77. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant l'identité $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\cos(x))$. 0445-17

Exercice 78. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 1/2$. 0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Exercice 79. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x/\ln(x)$ réalise une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur lui-même. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. 0450-17

Exercice 80. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$. 0580-17

On veut montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel x. Quitte à échanger les rôles de f et de g, on fait l'hypothèse $f(0) > g(0)$.

a. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout x dans $[0,1]$, on ait $f(x) \geqslant g(x) + c$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, prouver l'inégalité

$$f^{\circ n}(x) \geqslant g^{\circ n}(x) + nc,$$

où la notation $f^{\circ n}$ désigne la composée n-ième de f avec elle-même.

c. Conclure.

0584-17

Exercice 81. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$.

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 82. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe. 0721-17

Exercice 83. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. A053-17

1. Dans cette question, on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f, noté G_f, est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction f pour lequel $\mathrm{G}_f = \mathbb{Q}$.

3. On suppose que f admet 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ admet une infinité de solutions dans $]0, 1/2[$.

A058-17

Exercice 84. On pose $f(x) = x^2 + \left\lfloor \dfrac{1}{1 - \lfloor x^2 \rfloor} \right\rfloor$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Étudier la continuité de f en ± 1 et en $\pm\sqrt{2}$.

c. Trouver une expression simplifiée de f sur les intervalles où elle est définie.

d. Tracer le graphe de la fonction f.

Question de cours supplémentaire. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 85. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto (1 + x^2)^{n + \frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. 0094-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$, prouver la relation $f_n^{(2n+2)}(x) = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)^2 \right) (1 + x^2)^{-n - \frac{3}{2}}$.

Séries numériques

Exercice 86. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Y a-t-il des implications entre les deux énoncés suivants ? 0440-17
(i) La série $\sum a_n$ converge.
(ii) $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 87. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$. 0830-17

Exercice 88. Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}$. 0831-17

Exercice 89. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$. 0719-17

a. Justifier l'existence de R_n.

b. Montrer que $(n+1)!\mathrm{R}_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

Exercice 90. Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. 0834-17

Exercice 91. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs, qui converge vers 0. A039-17

On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Prouver que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 92. Étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ (convergence et convergence absolue). A050-17

Exercice 93. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < a < b-1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs vérifiant la relation de récurrence A084-17

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1.

a. Trouver un équivalent de $\ln((n+a)/(n+b))$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ tend vers $-\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^{b-a} u_n$.

a. Montrer que la série de terme général $\ln(v_n)$ est convergente.

b. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que u_n soit équivalent à K/n^{b-a} quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

3. Prouver l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \dfrac{b-1}{b-a-1}$.

Indication : simplifier les sommes $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 94. On pose 0730-17

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \qquad \forall x \in]0,1], \quad g_n(x) = nx^n \ln(x), \qquad \forall x \in [0,+\infty[, \quad h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin(2nx).$$

Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme des suites de fonctions ainsi définies.

Exercice 95. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = 3^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$. 0731-17

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1]$.

b. Le passage à la limite sous l'intégrale dans $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est-il valide ?

Exercice 96. On définit une suite (P_n) de fonction sur $[0,1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$, A055-17

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}.$$

Pour tout x dans $[0,1]$, on définit aussi la fonction $g_x : t \mapsto t - (x - t^2)/2$.

Enfin, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0,1]$.

2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver que P_n est dérivable et obtenir l'identité

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}'_n(x)(1 - \mathrm{P}_n(x)).$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0,1]$.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

6. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une certaine fonction à préciser.

Exercice 97. Trouver l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$. 0600-17

Après avoir simplifié le produit $\displaystyle\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(1 + x^{2^n}\right)$, expliciter $f(x)$.

Exercice 98. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - \mathrm{i}x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle intégrable ? 0606-17

Exercice 99. Trouver un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ quand x tend vers 1. 0616-17

Exercice 100. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto n x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}$. 1119-17

Étudier les différents modes de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 101. On se donne une fonction f définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose A026-17

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n).$$

On pose $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ quand c'est possible.

1. Pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(1) = f(\mathrm{N}+1) - f(1)$. En déduire que l'existence de F(1) équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n \geqslant 1}$.

2. On prend $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Montrer que F(1) existe et donner sa valeur.

3. On prend $f : x \mapsto \sin(\pi x + \pi\sqrt{x}/2)$. Étudier l'existence de F(1). Indication : considérer $f((2n+1)^2)$.

4. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f(n)$ est convergente. Sa somme est notée S.

a. Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$, le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe.

b. Montrer que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} (\mathrm{F}(p) - \mathrm{F}(p+1))$ existe et exprimer sa valeur en fonction de S.

5. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note C_p l'énoncé « le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe ». Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que l'énoncé C_p soit vrai.

6. Montrer que la fonction de la question 3 vérifie C_2.

Exercice 102. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$. A046-17

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Séries entières

Exercice 103. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. 0305-17

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Exercice 104. Rayon de convergence de la série entière $\sum (3 + (-1)^n)^n x^n$. 0738-17

Exercice 105. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n\binom{2n}{n}}$. 0861-17

Exercice 106. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t$. Pour tout x convenable, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. 0858-17

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S.

b. Exprimer $\mathrm{S}(x)$.

Exercice 107. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{in\alpha}}{n} x^n$. 0863-17

Exercice 108. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$. A021-17

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est impaire et croissante.

3. Montrer que F possède une limite finie en $+\infty$.

4. Montrer l'existence d'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4^n} x^{4n+1}.$$

5. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $F(x) + F(1/x) = 2F(1)$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x dans $]0,1[$, prouver la majoration

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4^n} x^{4n+1} \right| \leqslant \frac{1}{4p+5}.$$

Exercice 109. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \exp(x\sin(t))\, dt$ est-elle développable en série entière ? A051-17

Exercice 110. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$. A077-17

Intégration

Exercice 111. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive. 0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(x) \int_a^b g(t)\, dt$.

Exercice 112. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin}(t)}\, dt$ quand x tend vers 0. 0881-17

Exercice 113. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}}\, dx$ quand α tend vers 0. 1114-17

Exercice 114. On pose $f(t) = \ln(t) + \displaystyle\int_1^{1/t} \frac{dx}{(1+x^4)^{1/4}}$. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0. 0455-17

Exercice 115. Le produit de deux fonctions continues et intégrables sur $]0,1]$ est-il encore intégrable ? 0462-17

Si f est continue et intégrable sur $]0,1]$, est-ce encore vrai pour $t \mapsto f(t)\ln(t)$?

Exercice 116. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\, dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$. 0587-17

0594-17

Exercice 117. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

0726-17

Exercice 118. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n\ \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur en cas d'existence.

0845-17

Exercice 119. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

A065-17

Exercice 120. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

A070-17

Exercice 121. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il est possible de poser $\mathrm{A}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

b. Trouver un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$ dans le cas $f(0) \neq 0$.

0846-17

Exercice 122. Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$.

a. Si f est intégrable sur $[0,+\infty[$, montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

0472-17

Exercice 123. Soit $s > 1$. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}t^{s-1}\right)\ \mathrm{d}t = \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\ \mathrm{d}t\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)$.

0893-17

Exercice 124. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que cette intégrale existe.

b. Justifier l'égalité $\mathrm{I} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}$.

A004-17

Exercice 125. On pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est définie sur $]0,+\infty[$.

b. Pour tout $x > 1$, prouver que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c. Pour tout $x > 1$, prouver que la série $\sum f_n(x)$ est convergente et exprimer sa somme.

d. Prouver que la série $\sum f_n(1)$ est divergente. On raisonnera par l'absurde.

0631-17

Exercice 126. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Trouver une relation entre f et f' et en déduire une expression de f.

Exercice 127. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$. 0887-17

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Exercice 128. Trouver un équivalent de $\operatorname{Arccos}(u)$ quand u tend vers 1. 1135-17

En déduire que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{Arccos}(1 - xt)}$ est bien définie puis prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 129. Soit φ une fonction continue, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$. 0626-17

Déterminer la limite de $x \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\varphi(t)\, dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 130. On pose $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{z+1}}\, dt$ quand c'est possible. 0754-17

a. Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

b. Soit $x \in]1, +\infty[$. Exprimer $F(x)$ en fonction de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

c. Montrer que $(x, y) \mapsto F(x + iy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Équations différentielles

Exercice 131. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x - 2y \\ y' & = & 2x - y. \end{array}\right.$ A043-17

Exercice 132. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x + y + z \\ y' & = & x - 3y + z \\ z' & = & x + y - 3z. \end{array}\right.$ 0898-17

Exercice 133. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & -6y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 1/x \\ y_2' & = & -8y_1 + 7y_2 + 4y_3 \\ y_3' & = & -2y_1 + y_2 + y_3 + 2/x. \end{array}\right.$ 0899-17

Exercice 134. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que A011-17

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x - t)\, dt.$$

Exercice 135. Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, à valeurs strictement positives, telle que q' soit strictement positive. 0638-17

Montrer que les solutions de $y'' + qy = 0$ sont bornées sur $[0, +\infty[$. (Indication : multiplier par y'/q.)

Exercice 136. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit p une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. 0637-17

L'équation différentielle $y' - \lambda y = p(x)$ admet-elle une solution 1-périodique ?

Exercice 137. Montrer que l'équation différentielle $|x|y' + x(1-x)y = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$. 1139-17

A028-17

Exercice 138. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

On admet la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

On note (E) l'équation différentielle $(x^2-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$.

1. Pour tout t dans $[0, \pi/2]$, déterminer la limite de $\cos^n(t)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_{2n+1} x^{2n+1}$.

Pour tout x dans $]-1, 1[$, on pose $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

4. Pour tout x dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité

$$(x^2-1)g''(x) + 2xg'(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^2 u_{2n+1} - (2n+2)(2n+3)u_{2n+3}\right) x^{2n+1}.$$

En déduire que g est solution de (E) sur $]-1, 1[$.

On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ est également solution de (E) sur $]-1, 1[$.

5. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1, 1[$ à l'aide des fonctions f et g.

6. Pour tout x dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1 - x^2\cos^2(t)} \cos(t)\ \mathrm{d}t$.

7. En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Fonctions de plusieurs variables

A087-17

Exercice 139. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

0760-17

Exercice 140. Soient a et b dans $]0, +\infty[$. Étudier les extrema sur $]0, +\infty[^2$ de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{a}{x} + xy + \dfrac{x}{b}$.

0761-17

Exercice 141. Déterminer les extrema de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$.

1142-17

Exercice 142. On note $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ -1 < x < y < 1\}$ et $\mathrm{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$.

Étudier les extremums de f sur D et sur D′.

A063-17

Exercice 143. On définit $f : (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f.

Exercice 144. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2})$. 1140-17

Exercice 145. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $||x||$ tend vers $+\infty$.

Probabilités et dénombrement

Exercice 146. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$. 0613-16

Exercice 147. Pour tout couple (n, p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $\mathrm{E}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'équation A030-17

$$\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = p,$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Calculer $\mathrm{E}_{1,1}$ et $\mathrm{E}_{2,2}$.

2. On note $\mathrm{S}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'inéquation $\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqslant p$.
Exprimer $\mathrm{E}_{n,p}$ à l'aide de certains des $\mathrm{S}_{n,k}$.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{E}_{n,1} = 3^n - 1$.

4. Plus généralement, prouver l'égalité $\mathrm{E}_{n,p} = (2p + 1)^n - (2p - 1)^n$ si $p \geqslant 1$.

5. En déduire qu'il existe une constante C telle que $\mathrm{E}_{n,n}$ soit équivalent à $\mathrm{C}(2n)^n$.

6. Compter le nombre de solutions du système

$$\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = p, \qquad \min(|x_1|, \ldots, |x_n|) = p - 1.$$

Exercice 148. On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2, supposées indépendantes. 0900-17

On pose $\mathrm{X} = \min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X.

b. Calculer $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 149. Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. A010-17

Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

Exercice 150. On considère trois urnes. L'urne U_1 contient trois boules blanches et quatre boules noires. L'urne U_2 contient cinq boules blanches et cinq boules noires. L'urne U_3 contient quatre boules blanches et six boules noires. A059-17

On pioche une boule dans U_1 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_2. On pioche ensuite une boule dans U_2 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_3. On pioche enfin une boule dans U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité que les trois boules piochées soient de la même couleur.

0765-17

Exercice 151. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de paramètre $p \in]0, 1[$. On appelle *doublet* le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose $q = 1 - p$.

L'événement A_n a pour énoncé ≪ On obtient le premier doublet au rang n. ≫.

L'événement B_n a pour énoncé ≪ On a obtenu au moins un doublet au cours des n premières épreuves. ≫.

On pose $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

a. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$.

b. Justifier la formule de récurrence $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)$.

c. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n$.

d. Résoudre cette relation de récurrence en passant par le calcul des puissances d'une matrice.

Exercice 152. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables (y compris la poignée vide). On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. 0655-17

Calculer l'espérance de X.

Exercice 153. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. 0906-17

On pose $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{X}_n = 1, \mathrm{X}_{n+1} = 0\}$. Déterminer la loi de T.

Exercice 154. Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique une journée donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou aucun article. Déterminer la loi de Y, le nombre d'articles achetés au cours d'une journée. 0905-17

Exercice 155. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. 0916-17

Déterminer la loi de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Exercice 156. On fixe un entier $p \geqslant 2$. On considère une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$. On pose $\mathrm{M}_n = \max(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$. 0925-17

Déterminer la loi de M_n et la limite de $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 157. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. A019-17

On se donne des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ mutuellement indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Pour tout i dans $[\![1, \mathrm{N}]\!]$ et tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.

2. On définit la variable aléatoire $\mathrm{Y}_\mathrm{N} = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_\mathrm{N} > n)$.

3. Montrer que Y_N possède une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 158. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on fait les hypothèses A080-17

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 | \mathrm{X}_n = 1) = 0,2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 | \mathrm{X}_n = 0) = 0,4.$$

On note $x_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.

2. En déduire une expression de x_n.

3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ et de $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$.

Exercice 159. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. 0908-17

Exercice 160. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit f une fonction définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$, à valeurs réelles. On pose $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$. 0650-17

On suppose que X et Y sont indépendantes. Que dire de Y ?

Exercice 161. Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathrm{Z} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$. A060-17

Montrer qu'il existe k dans $[\![0, 2]\!]$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) \geqslant 4/9$.

Exercice 162. On lance deux pièces équilibrées indéfiniment. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « Les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face au cours des n premiers lancers. ». 1143-17

a. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$.

b. Sur les n premiers lancers, quel est le nombre moyen d'indices k pour lesquels l'événement E_k est réalisé ?

Exercice 163. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On fait l'hypothèse 1275-19

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbb{P}(\mathrm{X} = n + 2) = 3\mathbb{P}(\mathrm{X} = n + 1) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = n).$$

Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

Exercice 164. Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ? 0157-19

Géométrie

Exercice 165. On considère la courbe paramétrée par $\mathrm{M}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$. 0894-16

a. Comparer les positions des points $\mathrm{M}(t), \mathrm{M}(-t), \mathrm{M}(\pi - t), \mathrm{M}(\pi/2 - t)$. En déduire un intervalle aussi petit que possible permettant d'obtenir la totalité de la trajectoire.

b. Tracer la trajectoire de cette courbe.

c. Déterminer une équation de la tangente aux points réguliers de cette courbe.

d. Si $\mathrm{M}(t)$ est un point régulier de cette courbe, on note $\mathrm{A}(t)$ le point d'intersection de la tangente en ce point avec l'axe des abscisse et $\mathrm{B}(t)$ le point d'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées. Calculer la distance entre ces deux points.

Exercice 166. On définit l'ensemble $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x^3 - 2x\}$. 0477-17

a. Tracer l'ensemble D.

b. Soient A et B deux points distincts de D d'abscisses négatives. Discuter le nombre de points d'intersection entre la droite (AB) et l'ensemble D.

Exercice 167. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $\mathrm{A} = (-1, 0, 1)$ et $\mathrm{B} = (3, 1, 0)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$. 1152-17

a. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Idem pour la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.

b. Montrer qu'il existe une valeur minimale de la distance MN lorsque M est un point qui parcourt la droite D et N est un point qui parcourt la droite Δ. On déterminera cette distance.

Exercice 168. Représenter rapidement la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^2$ et $y(t) = 2t^3$. S001-16

Étant donné deux paramètres t et u, déterminer une équation de la tangente au point de paramètre t et de la normale au point de paramètre u. Dans quels cas ces deux droites sont-elles confondues ?
