Cahier de vacances de mathématiques — PC*

Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1.

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2}\,\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver les relations suivantes

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Le but de cette partie est de prouver que $n!$ est équivalent à $n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \dfrac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\dfrac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p}\,\mathrm{W}_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Intermède 1 On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/7}$ puis

$$\mathrm{S} = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

a. Calculer $\mathrm{S}+\mathrm{T}$ et ST.

b. En déduire les valeurs de S et de T.

Problème 2

Première partie (quelques calculs préliminaires)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. On note φ la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

Question 13. Justifier les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Question 14. Démontrer les égalités $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Question 15. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation u^k désigne l'itérée k-ième d'ordre k, c'est-à-dire la composée $u \circ \cdots \circ u$, dans laquelle la lettre u apparaît k fois. En particulier, la notation u^0 désigne Id_{E}. On note n la dimension de E.

Question 16. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.

Question 17. Montrer que la suite de terme général $\delta_k = \mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1})$ est décroissante.

Question 18. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$, on ait $\delta_k = 0$. Dans la suite, on choisit p minimal pour cette propriété.

Question 19. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

Question 20. On note v la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^p)$. Montrer que v est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^p)$.

Troisième partie (endomorphismes nilpotents)

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme u de E et l'entier p. On suppose de plus que u est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier s tel que u^s soit l'application nulle.

Question 21. Montrer que u^p est l'application nulle mais pas u^{p-1}.

Question 22. Montrer l'inégalité $p \leqslant n$.

Question 23. Dans cette question, on ajoute l'hypothèse $p = n$. On considère un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on lui associe la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et écrire la matrice de u relativement à cette base.

Problème 3

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Le premier joueur tire des boules de l'urne sans remise ; il s'arrête quand il obtient la boule portant le numéro n. On note X_1 le nombre de tirages effectués par le premier joueur. Le deuxième joueur effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le numéro maximal parmi les boules restantes. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le deuxième joueur (avec la convention que X_2 vaut 0 si X_1 vaut n).

Question 24. Déterminer la loi de X_1.

Question 25. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $[\mathrm{X}_1 = j]$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Question 26. Écrire en Python une fonction `simulation(n)` qui prend en entrée l'entier n et simule l'expérience ci-dessus ; cette fonction renvoie la liste $[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2]$.

Tester cette fonction : vérifier expérimentalement la valeur de l'espérance de X_2 dans le cas $n = 100$.

Problème 4

On fixe un nombre complexe z tel que $|z|<1$.

Question 27. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la suite $(n^\alpha z^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Question 28. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^p z^n$ converge absolument. On pose alors

$$\mathrm{S}_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n.$$

Question 29. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\binom{n}{p}$ est équivalent à $n^p/p!$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 30. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant p} \binom{n}{p} z^{n-p}$ converge absolument. On pose alors

$$\mathrm{T}_p(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p}.$$

Question 31. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $(1-z)\mathrm{T}_p(z) = \mathrm{T}_{p-1}(z)$. En déduire une expression de $\mathrm{T}_p(z)$ valable pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Question 32. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, trouver un polynôme Q_p tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{p} = \mathrm{Q}_p(n).$$

Question 33. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $(a_{p,0},\dots,a_{p,p})$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\mathrm{X}^p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_{p,k}\mathrm{Q}_k$.

Déterminer cette décomposition pour tout $p \in [\![0,3]\!]$. Préciser la valeur de $a_{p,p}$ dans le cas général.

Question 34. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de $\mathrm{S}_p(z)$.

Question 35. Préciser l'expression de $\mathrm{S}_p(z)$ pour tout $z \in [\![0,3]\!]$.

Problème 5

On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On lui associe les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}\ ;\ f(0)=f(1)=0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}\ ;\ f''=f\}.$$

Pour tout couple (f,g) d'éléments de E, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (fg+f'g')$.

a. Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

b. Déterminer une base orthonormée de G.

c. Montrer que F et G sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

d. Donner l'expression de la projection orthogonale sur G.

Intermède 2

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{Arctan}(x)$ est un argument de $1+\mathrm{i}x$.

b. Simplifier la somme $\mathrm{Arctan}(2)+\mathrm{Arctan}(5)+\mathrm{Arctan}(8)$.

Suppléments corsés

Exercice 1. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. On fixe $s > 1$. Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $d(n)/n^s$ est convergente. On fixe ε dans $]0,1[$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit sa décomposition en produit de facteurs premiers

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Montrer l'égalité $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

b. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. On suppose que $p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}$. Montrer que $\dfrac{\alpha_i + 1}{p_i^{\varepsilon \alpha_i}} \leqslant 1$.

c. Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto (x+1)2^{-\varepsilon x}$ sur $[0, +\infty[$.

d. En déduire l'existence d'une constante C_ε ne dépendant que de ε telle que $d(n) \leqslant \mathrm{C}_\varepsilon n^\varepsilon$.

e. Conclure.

Exercice 3. Soit C une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'identité

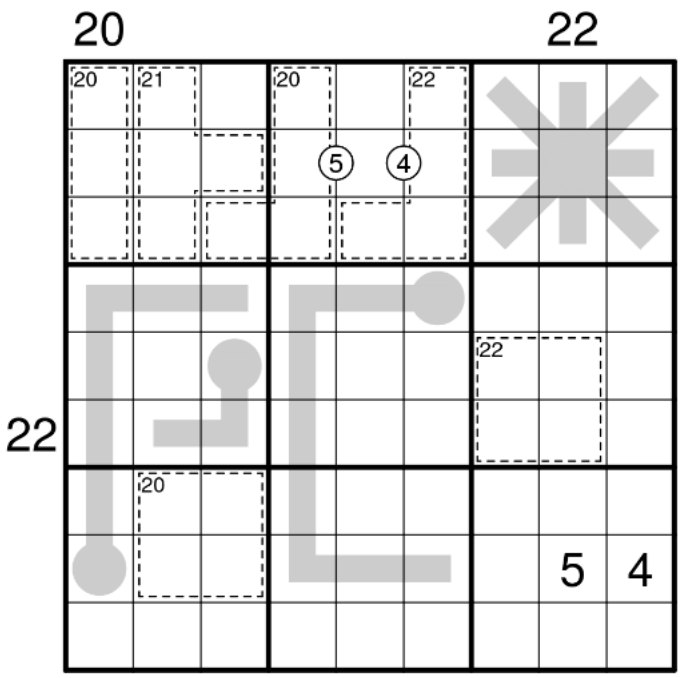
$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{dét}(\mathrm{C} + \mathrm{M}) = \mathrm{dét}(\mathrm{M}).$$

Montrer que C est la matrice nulle.

Sudoku « PC* 2021-2022 »

Chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 3×3 délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre de 1 à 9.
Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe.
L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.
Dans chaque cage délimitée en pointillés, les chiffres sont tous différents et leur somme est indiquée dans un coin de la cage.
Chaque chiffre dans un petit cercle est l'écart entre les deux chiffres qui l'entourent.
Chaque nombre dans la marge est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la ligne/colonne correspondante.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : `https://git.io/JnPGT`



Pour me contacter : `edouardlebeau-pc@yahoo.fr`

Site de la classe (lien cliquable) : `http://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare`
