PC* — mathématiques **lundi 28 juin 2021**
Évaluation de connaissances **durée : environ trois quarts d'heure**

Prénom : **Nom :**

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $u_n + u_{n-1}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'égalité $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}' + (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}''$, ce qui définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

a. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 16\mathrm{Id})$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'intervalle $\mathrm{I}_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{I}_n$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ de I dans $\mathbb{R}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction f s'annule en exactement un point de I_n (ce point d'annulation est noté x_n dans la suite).

b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, prouver l'égalité $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n)$.

c. Trouver un équivalent simple de x_n puis de $x_n - n\pi - \pi/2$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

a. Rappeler en formules en quoi consiste cette loi.

b. Décrire un cas typique d'expérience dans laquelle une grandeur est modélisée par une variable aléatoire de même loi que X.

c. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.