PC* — mathématiques **lundi 28 juin 2021**
Évaluation de connaissances **durée : environ trois quarts d'heure**

Prénom : **Nom :**

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $u_n + u_{n-1}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'égalité $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution de l'exercice 1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} k^2 + n^2 \quad \text{et} \quad u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} k^2 = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} k^2.$$

Par somme, il reste $u_n + u_{n-1} = n^2$.

---

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'égalité $u_n = n(n+1)/2$.

On trouve $u_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} (-1)^{-k} k^2 = 0$ et $0(0+1)/2 = 0$ donc A_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A_{n-1} est vraie, ce qui s'écrit $u_{n-1} = (n-1)n/2$. La relation de la première question donne alors

$$u_n = n^2 - u_{n-1} = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\left(2n - (n-1)\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

si bien que A_n est vraie.

Par récurrence, l'égalité $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est valable pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Si on pense à lire l'énoncé en entier, on peut avoir l'idée d'effectuer le calcul

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2.$$

Sachant cela, l'énoncé de la première question devient : démontrer que $u_n + u_{n-1} = n^2$, ce qui peut guider le calcul.

Exercice 2. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}' + (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}''$, ce qui définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

a. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 16\mathrm{Id})$.

Solution de l'exercice 2. a. Le calcul donne $f(1) = 0$ et $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ puis

$$\forall k \in [\![2,4]\!], \quad f(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X} \times k\mathrm{X}^{k-1} + (\mathrm{X}^2 - 1) \times k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} = k^2\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2}.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3, \mathrm{X}^4)$, notée A, est donc

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

b. La matrice de $f - 16\mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$ vaut

$$\mathrm{A} - 16\mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} -16 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$. L'appartenance de U à $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 16\mathrm{I}_5)$ équivaut au système (S) suivant

$$\left\{\begin{array}{rcccccccl} -16u_0 & & & - & 2u_2 & & & & = 0 \\ & - & 15u_1 & & & - & 6u_3 & & = 0 \\ & & & - & 12u_2 & & & - 12u_4 & = 0 \\ & & & & & - & 7u_3 & & = 0. \end{array}\right.$$

Après deux étapes, que je ne détaille pas, ce système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ u_2 & = & -8u_0 \\ u_3 & = & 0 \\ u_4 & = & 8u_0. \end{array}\right.$$

Le noyau de $\mathrm{A} - 16\mathrm{I}_5$ est donc la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On en déduit que le noyau de $f - 16\mathrm{Id}$ est la droite vectorielle engendrée par $1 - 8\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X}^4$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'intervalle $\mathrm{I}_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$. On pose $\mathrm{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{I}_n$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ de I dans $\mathbb{R}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction f s'annule en exactement un point de I_n (ce point d'annulation est noté x_n dans la suite).

b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, prouver l'égalité $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n)$.

c. Trouver un équivalent simple de x_n puis de $x_n - n\pi - \pi/2$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 3. a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction f est continue sur l'intervalle I_n, à valeurs réelles, avec pour limites $-\infty$ en $-\pi/2 + n\pi$ et $+\infty$ en $\pi/2 + n\pi$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

La fonction f est également dérivable sur l'intervalle I_n, de dérivée $f' : x \mapsto \tan^2(x)$. Cette dérivée est positive et s'annule en un seul point (en $n\pi$) donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I_n. Elle s'annule donc une seule fois dans cet intervalle.

b. Le nombre $x_n - n\pi$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et sa tangente vaut

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

donc $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n)$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit la majoration $|\mathrm{Arctan}(x_n)| \leqslant \pi/2$ donc $\mathrm{Arctan}(x_n)$ est négligeable devant n quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit la relation $x_n = n\pi + \mathrm{o}(n)$, qui donne l'équivalent $x_n \sim n\pi$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre x_n est strictement positif donc $\mathrm{Arctan}(x_n) - \pi/2 = -\mathrm{Arctan}(1/x_n)$, ce qui donne

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, le quotient $1/x_n$ tend vers 0 donc $\mathrm{Arctan}(1/x_n)$ est équivalent à $1/x_n$, ce qui donne finalement

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}.$$

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

a. Rappeler en formules en quoi consiste cette loi.

b. Décrire un cas typique d'expérience dans laquelle une grandeur est modélisée par une variable aléatoire de même loi que X.

c. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.

Solution de l'exercice 4. a. La loi de X est donnée par

$$\begin{cases} \mathrm{X}(\Omega) = [\![0, n]\!], \\ \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{cases}$$

b. On considère une suite de n expériences identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès vaut p. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

c. Question difficile. La formule du transfert donne

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

On en déduit l'égalité

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Effectuons le décalage d'indice $i = k+1$.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^{i-1} (1-p)^{n+1-i} = \frac{1}{(n+1)p} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{n+1-i} - (1-p)^{n+1} \right).$$

La formule du binôme donne finalement

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \left(1 - (1-p)^{n+1}\right).$$
