Exercice 1. **Irrationalité de π**

Dans ce problème, on prouve que π est irrationnel. On suppose qu'il existe deux entiers a et b strictement positifs tels que $\pi = a/b$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $\mathrm{P}_n = \dfrac{\mathrm{X}^n\,(a - b\mathrm{X})^n}{n!}$ et on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{P}_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que I_n est strictement positif.

Question 2. Quel est le maximum de la fonction P_1 sur $[0, \pi]$?

Question 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la majoration $\mathrm{I}_n \leqslant 2 \times \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$.

Question 4. Que peut-on en déduire pour la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Question 5. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, prouver que $\mathrm{P}_n^{(k)}(0)$ est un élément de $\mathbb{Z}$. On pourra utiliser la formule de Taylor.

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Trouver une relation entre $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})$ et $\mathrm{P}_n(\frac{a}{b} - \mathrm{X})$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en déduire que $\mathrm{P}_n^{(k)}(a/b)$ est un élément de $\mathbb{Z}$.

Question 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme

$$\mathrm{Q}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \mathrm{P}_n^{(2k)}.$$

a. Simplifier le polynôme $\mathrm{Q}_n'' + \mathrm{Q}_n$.

b. En déduire l'égalité $\mathrm{I}_n = \mathrm{Q}_n(\pi) + \mathrm{Q}_n(0)$.

c. Prouver que I_n est un élément de $\mathbb{Z}$.

Question 8. Conclure.

Exercice 2. (*) Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ est inclus dans $[\![1, n]\!]$. Prouver alors la formule

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k).$$

Exercice 3. (**) Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit P un polynôme réel de degré n. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est une racine multiple de P'. Montrer que a est également une racine de P.

c. Trouver un polynôme complexe Q tel que Q' possède une racine multiple qui n'est pas une racine de Q.

Exercice 4. Théorème de Cesàro (***). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. On note ℓ sa limite.
Montrer la relation

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$
