

**Exercice 1. Famille orthogonale de polynômes (\*)** On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire défini par la formule

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

- a. Pour tout couple  $(i, j)$  de  $\mathbb{N}^2$ , calculer  $(X^i|X^j)$ .
- b. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes réels telle que
1. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $P_n$  soit unitaire (au sens des polynômes) ;
  2. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  soit une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- c. Déterminer les polynômes  $P_0, P_1, P_2$ .
- d. En déduire le minimum sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction

$$F_2 : (a, b) \mapsto \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

**Exercice 2. (\*)** Justifier que la fonction

$$f : (a, b) \mapsto \int_0^1 (e^t - at - b)^2 dt$$

possède un minimum sur  $\mathbb{R}^2$  et qu'il est atteint en un unique point.

Déterminer ce minimum.

**Exercice 3. (\*)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Prouver que  $F$  est stable par  $A$  si, et seulement si, son orthogonal est stable par  $A^T$ .

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

**Exercice 4. (\*\*)** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien  $E$ .

On se donne une base orthonormale  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et on note  $A$  la matrice représentative de  $u$  dans cette base.

On appelle *adjoint* de  $u$  tout endomorphisme  $v$  de  $E$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

a. Dans cette question, on suppose que  $u$  possède un adjoint  $v$ . Déterminer la matrice représentative de  $v$  dans la base  $\mathcal{E}$ .

b. Montrer que  $u$  possède exactement un adjoint.

**Exercice 5. (\*)** On note  $P$  le plan de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $u = (1, 1, 1, 0)$  et  $v = (1, 1, 0, 1)$ . On munit  $\mathbb{R}^4$  de son produit scalaire canonique.

Déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur  $P$ . Même question pour la symétrie orthogonale d'axe  $P$ .

**Exercice 6. (\*)** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien  $E$ .

Prouver l'égalité  $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ .

**Exercice 7. (\*)** Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x - y + 2z = 0$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Idem pour la symétrie orthogonale d'axe  $P$ .

**Exercice 8. (\*)** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $(X_1, \dots, X_p)$  une base orthonormale de  $F$ .

Démontrer que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur  $F$  s'écrit  $\sum_{k=1}^p X_k \cdot X_k^T$ .

**Exercice 9. (\*)** Une *réflexion* d'un espace euclidien  $E$  est une symétrie orthogonale relativement à un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de  $E$  dont la dimension vaut  $\dim(E) - 1$ .

**a.** Soit  $v$  un vecteur de  $E$  non nul. On note  $H_v$  l'hyperplan de  $E$  défini par  $H_v = \text{Vect}(v)^\perp$  et on note  $s_v$  la réflexion relative à  $H_v$ .

Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , démontrer la relation

$$s_v(x) = x - 2 \frac{(v|x)}{(v|v)} v.$$

**b.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , on note  $D_\theta$  la droite dirigée par le vecteur  $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  et on note  $s_\theta$  la réflexion relative à cette droite.

Déterminer la matrice canoniquement associée à  $s_\theta$ .

**c.** On se donne deux vecteurs  $a$  et  $b$  de  $E$  distincts et non nuls tels que  $\|a\| = \|b\|$ . Montrer qu'il existe une unique réflexion de  $E$  qui envoie  $a$  sur  $b$ .

**Exercice 10. (\*)** Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**a.** Prouver l'égalité  $\text{Ker}(M^T) = (\text{Im}(M))^\perp$ .

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

**b.** Prouver l'égalité  $\text{Ker}(M^T \cdot M) = \text{Ker}(M)$ .

**c.** Prouver l'égalité  $\text{rg}(M^T \cdot M) = \text{rg}(M)$ .

**d.** Quelle égalité obtient-on pour  $\text{Im}(M^T)$  ?

**e.** Dans cette question et la suivante, on ajoute la condition  $2 \leq p < n$ . On pose  $B = M^T \cdot M$  et on suppose que  $M$  est de rang  $p$ .

Montrer alors que  $B$  est inversible. Montrer ensuite que la matrice  $M \cdot B^{-1} \cdot M^T$  (notée  $P$ ) est une matrice de projection orthogonale. Vérifier l'égalité  $\text{Im}(P) = \text{Im}(M)$ .

**Exercice 11. (\*\*)** **Matrice de Gram** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs d'un espace euclidien  $E$ . On lui associe sa *matrice de Gram*, qui est la matrice

$$G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**a.** On note  $n$  la dimension de  $E$ . Trouver une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  vérifiant l'égalité  $M^T \cdot M = G(x_1, \dots, x_p)$ .

**b.** Prouver l'égalité  $\text{Ker}(M^T \cdot M) = \text{Ker}(M)$ .

**c.** En déduire que la matrice  $G(x_1, \dots, x_p)$  est inversible si, et seulement si, la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

**Exercice 12. (\*\*)** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2$  soit nulle.

**a.** Prouver l'égalité  $\text{Ker}(A + A^T) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^T)$ .

**b.** Montrer que l'inversibilité de  $A + A^T$  équivaut à l'égalité  $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$ .

**Exercice 13. (\*)** Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , prouver l'égalité  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .