Exercice 1. (*) Factoriser le polynôme $(\mathrm{X}+\mathrm{i})^n - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Exercice 2. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. (*) Déterminer $\lim\limits_{x\to 3}(3^x - 3\times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$.

Exercice 4. (**) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in [\![0, m-1]\!], \\ m! & \text{si} \quad j = m. \end{cases}$$

Exercice 5. Série exponentielle. (*) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral. Appliquer cette formule à la fonction exponentielle à l'ordre n entre 0 et x. En déduire, pour tout x réel et tout n entier, la majoration

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre n vers $+\infty$?

Exercice 6. (*) On pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver un lien entre $f(x)$ et $f(x+\pi)$.

c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d. Obtenir une expression de f' sur $[0, \pi/2]$ puis une expression de f sur ce même intervalle.

e. Même question sur $[-\pi/2, 0]$.

f. Représenter graphiquement la fonction f.

g. Interpréter géométriquement la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. (**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée possède une limite strictement positive en $+\infty$. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 8. (**) On considère une matrice $\mathrm{M} = (m_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.
Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul.
Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Exercice 9. (*) On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{E}_{i,j}\cdot\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$.
