Exercice 1. **Lemme de Riemann-Lebesgue (*)**

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction F admet une limite nulle en $+\infty$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une constante C (indépendante de x) telle que

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{x}.$$

b. Conclure.

Exercice 2. **Un calcul de somme infinie (*)** Le but de cet exercice est de calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, vérifier l'égalité $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

b. On définit une fonction f de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \,]0, \pi], \quad f(t) = \frac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin(t/2)}.$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

c. Pour tout entier m strictement positif, montrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

d. Qu'obtient-on en faisant tendre m vers $+\infty$?

Exercice 3. **Une propriété de la borne supérieure (*)**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $\lambda \in [0, +\infty[$. On note $\lambda\mathrm{A}$ l'ensemble

$$\{\lambda x \ ; \ x \in \mathrm{A}\}.$$

Le but de cet exercice est de prouver l'égalité $\sup(\lambda\mathrm{A}) = \lambda\sup(\mathrm{A})$.

a. Démontrer cette égalité dans le cas où λ vaut 0.

b. Dans cette question, on suppose que $\lambda > 0$. Démontrer l'inégalité $\sup(\lambda\mathrm{A}) \leqslant \lambda\sup(\mathrm{A})$.

c. Sans refaire tout le raisonnement, justifier la majoration $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\sup(\lambda\mathrm{A})$ et conclure.

Exercice 4. **Encore une urne et des boules (*)** Pour tout cet exercice, on fixe un entier n supérieur ou égal à 3.

Un sac contient $(n-2)$ boules rouges et deux boules jaunes. On extrait de ce sac des boules une par une *sans remise* jusqu'à obtenir une boule jaune. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où la première boule jaune est extraite.

a. Proposer une modélisation de cette expérience (choix de Ω et $\mathbb{P}$).

b. Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5. Régression linéaire (*)

On effectue une série de N mesures expérimentales au cours de laquelle on mesure deux grandeurs x et y.
Les valeurs obtenues pour le couple (x, y) sont notées

$$(x_1, y_1), \dots, (x_{\mathrm{N}}, y_{\mathrm{N}}).$$

On veut trouver des coefficients a et b tels que la droite d'équation $y = ax + b$ modélise le phénomène aussi fidèlement que possible. Le critère retenu est que les écarts verticaux entre les points de cette droite doivent être minimisés en moyenne quadratique. En d'autres termes, la quantité

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (y_k - ax_k - b)^2$$

doit être minimisée.

On introduit les nombres

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} x_k, \qquad \bar{y} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} y_k, \qquad v_x = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (x_k - \bar{x})^2, \qquad v_y = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (y_k - \bar{y})^2, \qquad c_{x,y} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}).$$

Ces nombres sont bien sûr la valeur moyenne de x, la valeur moyenne de y, la variance de x, la variance de y et la covariance du couple (x, y).

On introduit les vecteurs

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_{\mathrm{N}}), \qquad \vec{y} = (y_1, \dots, y_{\mathrm{N}}), \qquad \vec{n} = (1, \dots, 1)$$

de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. On suppose de plus que $\vec{x}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ et on note F le plan engendré par ces deux vecteurs.

a. Faire le lien entre la recherche de a et b et la détermination du projeté orthogonal du vecteur $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{\mathrm{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sur le plan F.

b. Calculer les valeurs de a et b qui réalisent le minimum de la fonction f, notée a_0 et b_0.

c. Montrer les égalités

$$a_0 = \frac{c_{x,y}}{v_x} \qquad \text{et} \qquad b_0 = \bar{y} - a_0 \bar{x}.$$

d. Écrire en Python une fonction d'en-tête `coefs_regression(x, y)` qui prend en entrée deux listes x et y de même taille (elles représentent les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$) et renvoie en sortie un tuple de deux flottants ayant pour valeur (a_0, b_0).

Les gens motivés pourront prolonger le plaisir en effectuant une représentation graphique sur laquelle figurent un nuage de points et la droite de régression linéaire. Je suggère pour l'occasion le nuage de points défini par le code Python suivant.

```
n = 50
x_min = 0
x_max = 200
aa = -1.5
bb = 2
x = np.linspace(x_min, x_max, n)
y = aa*x + bb
y = y + np.cos(y)*aa*10 - np.cos(y**2-np.pi/4)*aa*17
nuage = x, y
```

Exercice 6. (**) Soient E et F deux espaces euclidiens. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

a. Soit y dans F. Montrer qu'il existe x dans $(\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et y' dans $(\mathrm{Im}(f))^\perp$ vérifiant l'égalité $y = f(x) + y'$.

Montrer de plus qu'un tel couple (x, y') est unique. Le vecteur x est alors noté $g(y)$, ce qui définit une application g de F vers E.

b. Montrer que g est linéaire. Préciser son noyau et son image en fonction de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

c. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs orthogonaux et préciser leurs axes.

d. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que f est canoniquement représentée par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à g.

Exercice 7. $\boxed{\textbf{Réarrangement d'une série absolument convergente (**)}}$

On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et on pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[\![0, n_0]\!] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

c. Pour tout entier $n \geqslant n_1$, prouver la majoration

$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \varepsilon.$$

d. Conclure.

Exercice 8. $\boxed{\textbf{Réarrangement d'une série semi-convergente (***)}}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge mais que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ diverge.

a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{\varphi(n)}$ soit convergente, de somme a.

b. Montrer qu'il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{\psi(n)}$ soit divergente, avec des sommes partielles qui tendent vers $+\infty$.

c. Montrer qu'il existe une bijection $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{\rho(n)}$ soit divergente bien que la suite de ses sommes partielles soit bornée.
