PC* — mathématiques **jeudi 16 septembre 2021**
Devoir surveillé n° 1 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Exercice 1. **Une formule d'inversion**

Question 1. Pour tout triplet (j, k, p) d'entiers naturels tel que $j \leqslant k \leqslant p$, vérifier la relation

$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}.$$

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un élément $(a_0, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ et on pose

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad b_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j.$$

Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, prouver la relation

$$a_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} b_k.$$

Exercice 2. **Une équation fonctionnelle**

On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ et on suppose qu'elle vérifie l'identité

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(f(x)) = -2f(x) + 8x.$$

Question 3. Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n.$$

Question 4. Soit $x \in [0, +\infty[$. On lui associe une suite réelle $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $v_0(x) = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1}(x) = f(v_n(x)).$$

Vérifier que cette suite satisfait la relation de récurrence de la question précédente.

Question 5. En déduire que f est la fonction $x \mapsto 2x$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Question 6. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto f(a + x)$.
On rappellera au passage le nom de cette formule.

Question 7. Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a + 3x) - 3f(a + 2x) + 3f(a + x) - f(a)}{x^3}.$$

Exercice 4. **Familles orthogonales de polynômes**

On fixe un entier n strictement positif. On note $\mathcal{E}_n = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On se donne une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Question 8. Justifier que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Question 9. On applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{E}_n$ pour obtenir une base orthogonale $\mathcal{B}_n = (\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ constituée de polynômes unitaires (au sens des polynômes : leur coefficient dominant vaut 1).

Rappeler en quoi consiste ce procédé — en particulier, on donnera les formules qui définissent ces polynômes.

Le but de cet exercice est de prouver que le polynôme P_n possède n racines dans l'intervalle $]a, b[$.

Question 10. Soit Q un polynôme réel non nul. On suppose que la fonction associée à Q n'est pas de signe constant sur $[a, b]$.

Montrer alors que Q possède au moins une racine dans $]a, b[$ dont l'ordre de multiplicité est impair. On pourra raisonner par l'absurde.

Question 11. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_n(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est nulle et en déduire que P_n n'est pas de signe constant sur le segment $[a, b]$.

Question 12. On note s le nombre de racines de P_n dans $]a, b[$ qui ont un ordre de multiplicité impair. On note ces racines $x_1, \ldots, x_s$ et leur multiplicités sont notées respectivement $m_1, \ldots, m_s$.

On fait l'hypothèse $s < n$ et on pose $\mathrm{A} = \displaystyle\prod_{k=1}^{s} (\mathrm{X} - x_k)$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{A}(t)\mathrm{P}_n(t)$ est de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$ et justifier l'égalité $(\mathrm{A}|\mathrm{P}_n) = 0$ puis en déduire une contradiction.

Question 13. Conclure.

Question 14. Dans cette question, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

Montrer l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{X}\mathrm{P}_{n-1} = \mathrm{P}_n + a_n \mathrm{P}_{n-1} + b_n \mathrm{P}_{n-2}$.

Problème

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout polynôme réel P, on note encore P la fonction polynomiale, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui lui est associée.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx). \tag{1}$$

En cas d'existence, une telle suite s est dite *adaptée* à f.

L'objectif du problème est de déterminer certaines des fonctions de $\mathscr{E}$.

Partie I – généralités et exemples

Question 15. Soit f une fonction de $\mathscr{E}$ autre que la fonction nulle. Montrer qu'il existe une unique suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ adaptée à f. Montrer de plus que s_1 vaut 1.

Question 16. Montrer que si f est une fonction dérivable appartenant à $\mathscr{E}$, alors sa dérivée f' appartient aussi à $\mathscr{E}$.

Question 17. Montrer que les fonctions constantes appartiennent à $\mathscr{E}$.

Question 18. On note A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$. Établir que A est un élément de $\mathscr{E}$.

Question 19. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Question 20. On définit une fonction $\chi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Montrer que χ appartient à $\mathscr{E}$.

Partie II – recherche des éléments polynomiaux de $\mathscr{E}$

Question 21. Montrer que si P est un polynôme de degré 1 appartenant à $\mathscr{E}$, alors la suite adaptée à P est constante, égale à 1. Quels sont les polynômes de degré 1 appartenant à $\mathscr{E}$?

Question 22. On suppose dans cette question que P est un polynôme non nul élément de $\mathscr{E}$, et on note p son degré.

22.a. Montrer que la suite adaptée à P est la suite s de terme général $s_n = \dfrac{1}{n^{p-1}}$.

22.b. Montrer que si p est au moins égal à 1, alors on a l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Question 23. Pour tout polynôme Q, montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions

$$\mathrm{P}' = \mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Il est donc possible de définir une suite $(\mathrm{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *de polynômes en posant* $\mathrm{B}_0 = 1$ *et en imposant les relations*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{B}_p' = p\mathrm{B}_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathrm{B}_p(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Question 24. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_p.

Question 25. Vérifier l'égalité $\mathrm{B}_1 = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$ et calculer B_2.

Question 26. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} est un élément de $\mathscr{E}$ et on veut montrer que B_p en est un aussi. Pour cela, on définit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les fonctions φ_n et ψ_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}_p\left(x + \frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{n^{p-1}} \mathrm{B}_p(nx).$$

26.a. Montrer que la fonction $\varphi_n - \psi_n$ est constante.

26.b. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{1/n} \psi_n(x)\ \mathrm{d}x$.

26.c. Montrer que φ_n et ψ_n sont égales, puis conclure.

Question 27. Faire le bilan des questions précédentes : donner la liste complète des polynômes qui appartiennent à $\mathscr{E}$.
