Séries à termes positifs

Exercice 1. (*) (Séries de Bertrand)

a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 1$, montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta}$ est convergente. Pour cela, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann bien choisie.

b. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in]0,1[$, montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\beta (\ln(n))^\alpha}$ est divergente. La suggestion précédente est reconduite.

c. Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$. On s'inspirera de la méthode d'étude des séries de Riemann.

Exercice 2. (*) Déterminer la nature des séries dont le terme général suit

$$a_n = 2^{-(\ln(n))^{1/3}}, \qquad b_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}, \qquad c_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad d_n = \frac{n!\, x^n}{n^n}, \qquad e_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln(n)}.$$

Pour la première, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann. Pour les deux suivantes, on commencera par trouver un équivalent du terme général.

Exercice 3. Étudier la nature des séries dont les termes généraux suivent. Pour d_n et i_n, calculer la somme.

$$a_n = \frac{3^n}{n} \qquad b_n = \frac{n}{3+\cos(n)} \qquad c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \qquad d_n = (\cos(n) + \sin(n))\mathrm{e}^{-n} \qquad e_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$$

$$f_n = \mathrm{e}^{1/n} - \cos(1/n) - \sin(1/n) \qquad g_n = 3^{1/n} - 2^{1/n} \qquad h_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \qquad i_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$j_n = \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}} \qquad k_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \ell_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^n\,\mathrm{d}t$$

$$m_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^n (1-t)\,\mathrm{d}t \qquad p_n = \frac{1}{3^n\, n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \qquad q_n = n\, x^{n-1} \qquad r_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Série des différences

Exercice 4. (*) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

Exercice 5. (**) Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On fait l'hypothèse

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite de terme général $\ln(n^s\, u_n)$ possède une limite finie. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Séries de référence

Exercice 6. (*) Calculer les sommes suivantes, en précisant les domaines de validité.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{z^n}{n!}.$$

Exercice 7. (*) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Convergence absolue

Exercice 8. (*) Quelles sont les valeurs de z complexe pour lesquelles la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n)} \frac{z^n}{n^2}$$

est convergente ?

Exercice 9. (**) On fixe (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

a. Obtenir un développement asymptotique de u_n avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$.

b. En déduire qu'il existe un unique choix de (a, b) pour lequel la série de terme général u_n est convergente et préciser ce choix.

c. Pour ce choix particulier de (a, b), calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 10. (**) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre

$$u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

est un entier.

En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Séries alternées

Exercice 11. (**) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 12. (**) Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 13. (*) Montrer la convergence de la série de terme général

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Pour cela, on montrera que cette série vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. Pour l'hypothèse de décroissance, on commencera par justifier l'identité

$$|\mathrm{R}_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p+1} - \frac{1}{n+2p+2} \right).$$

Généraliser avec $\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 14. (*) On reprend la notation R_n de l'exercice précédent.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $\mathrm{R}_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire le développement asymptotique $\mathrm{R}_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

c. Qu'en déduit-on ?

Exercice 15. (**) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+2n})$.

Exercices variés

Exercice 16. (**) Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}$.

Exercice 17. (***) On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que la série de terme général $\dfrac{k - n\lfloor\frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$ est convergente.

b. Montrer que sa somme vaut $\ln(n)$.

Exercice 18. (***) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose que la série de terme général u_n est convergente et on note sa somme S.

a. Montrer que la série de terme général $(u_n)^2$ est convergente.

b. Trouver toutes les valeurs possibles pour la somme de la série des $(u_n)^2$.

Exercice 19. (***) On considère une série complexe convergente $\sum z_n$. On note S_n sa somme partielle de rang n.

Montrer que la série $\sum \dfrac{z_n}{n}$ est convergente.

Pour cela, on transformera l'expression de ses sommes partielles en remarquant l'égalité $z_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$.

Exercice 20. (**) On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{(\mathrm{S}_n)^2}$ converge. Pour cela, on observera la minoration $(\mathrm{S}_n)^2 \geqslant \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1}$.

b. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ a la même nature que la série $\sum u_n$.
Pour le cas de divergence, on séparera le cas où u_n/S_n tend vers 0 et on exploitera l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ lorsque t tend vers 0.

Exercice 21. (***) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que pour toute suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum (b_n)^2$ converge, la série $\sum a_n b_n$ converge.

Montrer que la série $\sum (a_n)^2$ converge. (Raisonner par l'absurde au moyen de l'exercice précédent.)

Exercice 22. (**) On définit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant x_0 strictement positif et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^{-n}\ln(x_n)$ est convergente (utiliser la série des différences).

c. Montrer que x_n admet un équivalent de la forme $\exp(2^n\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

Exercice 23. (***) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Montrer que la série de terme général $w_n = (u_n)^{\frac{n}{n+1}}$ est convergente aussi.

Indication. On majorera w_n en distinguant deux cas, selon que u_n est majoré ou minoré par 2^{-n-1}.
