Exercice 1. (*) Étudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x,\qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln(x))^{\ln(\ln(x))}},\qquad \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x})\sin(x)}{(1-\cos(x))\sqrt{\tan(x)}}\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. (*) Étudier la nature des intégrales suivantes selon la valeur de (α,β)

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha(\mathrm{e}^{\beta x}-1)\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^1 \frac{t^\beta}{1-t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. (*) a. Pour tout $x>0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est notée $\Gamma(x)$.

b. Pour tout $x>0$, montrer la relation $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

c. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

d. On admet l'égalité $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ avec des factorielles.

e. Pour tout $\alpha>0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de Γ.

Exercice 4. (**) a. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.

b. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$ et montrer que cette intégrale vaut I.

c. Additionner ces deux intégrales, appliquer une identité trigonométrique puis calculer la valeur de I.

Exercice 5. (**) Pour tout α dans $]0,1]$, prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout β dans $]1,+\infty[$, en déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(u^\beta)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 6. (**) On pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée.

b. En considérant $f(x)-f(1)$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}+\underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 7. (**) Monter que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 8. (**) **a.** Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On note I sa valeur.

b. Linéariser $\sin^3(t)$. En déduire l'identité suivante

$$\forall x > 0, \qquad \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0. En déduire la valeur de I.

d. Refaire ce travail avec $\sin^5(t)$ au lieu de $\sin^3(t)$.

Exercice 9. (**) Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la minoration $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi^\alpha (n+1)^\alpha}$.

b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 10. (**) **a.** Montrer que les intégrales suivantes convergent et qu'elles ont la même valeur

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(v)}{v^2}\,\mathrm{d}v, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. On définit une fonction f de $[0, \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $\mathrm{I}(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $\mathrm{I}(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

d. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ est constante.

e. Déterminer la valeur des intégrales introduites à la première question.

Exercice 11. (***) On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On suppose de plus que les fonctions f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la fonction $(f')^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et vérifie l'inégalité suivante

$$\left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(t))^2\,\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} (f''(t))^2\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 12. (***) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.
