# Devoir en temps libre n° 3

**Exercice 1.** **Polynômes de Laguerre (*)**

Dans cet exercice, on étudie une famille de polynômes orthogonale pour un certain produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h_n^{(n)}(t) \times \mathrm{e}^t. \end{array} \tag{1}$$

**Question 1.** Pour tout entier $n$, montrer que l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

existe et qu'elle vaut $n!$ .

**Question 2.** En déduire que pour tout polynôme réel P, la fonction

$$t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t} \tag{3}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

---

Pour tout couple $(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ de polynômes réels, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

---

**Question 3.** Montrer que la fonction $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

**Question 4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Leibniz, obtenir une expression de la fonction $\mathrm{L}_n$. En déduire que cette fonction est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on note encore $\mathrm{L}_n$ le polynôme dont $\mathrm{L}_n$ est la fonction associée.

**Question 5.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

**a.** Écrire le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction $h_n$. En déduire que pour tout entier $k$ compris entre 0 et $n-1$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

**b.** Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n$, prouver l'égalité

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t)\mathrm{P}^{(p)}(t) \, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

**c.** En déduire que la famille $(\mathrm{L}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire introduit plus haut.

**Question 6.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. À l'aide du polynôme $\mathrm{L}_n$, exprimer le projeté orthogonal de $X^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
En déduire la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left( t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \ ; \ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{6}$$

---

**Exercice 2. (*)** On considère un élément $z$ de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

**Question 7.** Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$.

**Question 8.** Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

**Question 9.** Préciser la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - \mathrm{i}}$.

---

**Exercice 3. (**)** Pour tout $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\, \mathrm{d}t$.
On pose également $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\mathrm{G}(0) = 0$.

**a.** Prouver que les fonctions F et G sont bien définies et qu'elles sont continues sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

**b.** Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, \mathrm{d}t$$

et en déduire la majoration $|\mathrm{F}(x)| \leqslant 2x^2$.

**c.** Prouver que la fonction F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{F}'(0)$. La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ?

**d.** Prouver que la fonction G est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{G}'(0)$.

**e.** L'ensemble des fonctions définies de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une primitive est-il stable par produit ?

---

**Exercice 4. (**)** Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \times \frac{1}{x}.$$

**a.** Prouver que la fonction $f$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$.

**b.** La fonction $f$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$ ?

**c.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

**d.** Justifier que la série de terme général $\mathrm{I}_n$ est convergente.

**e.** Pour tout $a$ dans $]0, 1]$, on pose $n(a) = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$. Prouver la majoration

$$\left| \int_a^{1/n(a)} f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n(a)}.$$

**f.** En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

---

**Exercice 5. (***)** Soit $f$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Pour tout $x$ réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\mathrm{F}(x)$ tend vers $2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

---