PC* **— mathématiques** **jeudi 7 octobre 2021**
Devoir surveillé n^o 2 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Exercice 1

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n = \cos(n\alpha) \quad \text{et} \quad s_n = \sin(n\alpha).$$

Question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer c_{n+1} et s_{n+1} en fonction de c_n et de s_n.

Question 2. On suppose que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note sa limite γ.
Prouver alors que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de γ.

Question 3. On suppose que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note sa limite σ.
Prouver alors que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction σ.

Question 4. Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux divergentes.

Exercice 2

Dans cet exercice, on étudie la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

On définit sur $[1, +\infty[$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = g(n), \qquad v_n = \int_n^{n+1} g(x)\ \mathrm{d}x, \qquad w_n = v_n - \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

Question 5. Trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \left|g''(x)\right| \leqslant \frac{c}{x^{3/2}}.$$

Question 6. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles. Prouver l'égalité

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\ \mathrm{d}x.$$

Question 7. En déduire une expression de w_n sous la forme d'une intégrale et prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge absolument.

Question 8. Prouver que la suite $(\cos(\sqrt{n+1}))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite. On pourra utiliser le résultat du premier exercice.

Question 9. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer explicitement $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ et en déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} v_k$ est divergente.

Question 10. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Problème 1

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t$ par une autre méthode que celle vue en classe.

Question 11. Soit $a > 0$. Soit $f :]0, a] \to$ une fonction continue et croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme de Riemann

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}a\right).$$

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Le but de cette question est de prouver que la suite $(\mathrm{R}_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge vers la valeur de cette intégrale.

a. Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, prouver la majoration $\displaystyle\frac{a}{n}f\left(\frac{k}{n}a\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}a}^{\frac{k+1}{n}a} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, prouver la minoration $\displaystyle\frac{a}{n}f\left(\frac{k}{n}a\right) \geqslant \int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} f(t)\ \mathrm{d}t$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, en déduire l'encadrement $\displaystyle\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_n(f) \leqslant \int_{\frac{a}{n}}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t + \frac{af(a)}{n}$.

d. Conclure.

Question 12. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t$.

Question 13. Soit un entier $n \geqslant 2$. Rappeler la factorisation sur $\mathbb{C}$ du polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ et en déduire l'égalité polynomiale

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{X}^k\right)^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right) + 1\right).$$

Question 14. Pour tout entier $n \geqslant 2$, en déduire l'égalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Question 15. Pour tout entier $m \geqslant 1$, en déduire l'égalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right) = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$.

Question 16. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t$.

Problème 2

Le but de ce problème est de calculer les sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$

Pour cela, introduisons quelques notations. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}, \qquad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose
$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$
On pose aussi $\mathrm{S}_0 = 0$, ce qui permet d'avoir l'égalité $\mathrm{R}_n + \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Question 17. Rappeler pourquoi la série de terme général $(-1)^k/k$ est convergente et préciser le signe de R_n.

Question 18. Dans cette partie, on calcule R_0 au moyen d'un développement asymptotique de H_n.

a. Au moyen de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1})$, prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note sa limite γ.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_n$.

c. En déduire une expression de S_{2n} en fonction de u_n et u_{2n}.

d. Prouver finalement l'égalité $\mathrm{R}_0 = -\ln(2)$.

Question 19. Dans cette partie, on trouve un équivalent de $|\mathrm{R}_n|$ quand n tend vers $+\infty$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité
$$|\mathrm{R}_n| = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2p+1} - \frac{1}{n+2p+2}\right).$$

b. En déduire que la suite $(|\mathrm{R}_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité
$$|\mathrm{R}_n| + |\mathrm{R}_{n+1}| = \frac{1}{n+1}.$$

d. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, en déduire l'encadrement
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

e. En déduire la limite de $n|\mathrm{R}_n|$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 20. Dans cette partie, on calcule la somme de la série $\sum \mathrm{R}_n$.

a. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$ est convergente.

b. Soit N dans $\mathbb{N}$. À l'aide de l'écriture $\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_0 - \mathrm{S}_n$, obtenir l'égalité
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n = (\mathrm{N}+1)\mathrm{R}_0 - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{k}.$$

c. Soit N dans $\mathbb{N}$. Prouver l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n = -\dfrac{1}{2} + (\mathrm{N}+1)\mathrm{R}_\mathrm{N} + \dfrac{(-1)^\mathrm{N}}{2}$.

d. Conclure.