Exercice 1. (*) Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, on note

$$||\mathrm{P}|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} |\mathrm{P}(x)| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

a. Prouver que $||\ ||$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b. Montrer que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||$ et vers 1 pour la norme N.

c. (**) Construire une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Exercice 2. (**) Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$||\mathrm{A}|| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,.$$

a. Vérifier que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver la majoration $||\mathrm{AB}|| \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}||$.

c. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, prouver la majoration $||\mathrm{AX}||_\infty \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{X}||_\infty$.

d. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour lequel la majoration précédente est une égalité.

Exercice 3. (*) Soit $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$. Montrer l'égalité

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{B}\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{B}_f(x_0, 1).$$

Exercice 4. (*) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

On suppose que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice A et que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice B.

Montrer alors que la suite $(\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Exercice 5. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est la matrice nulle.

Exercice 6. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est une matrice de projection.

Exercice 7. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que f préserve le produit scalaire, ce qui signifie que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

On pose $g = f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(g))^\perp$.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Pour tout vecteur x de E, montrer que la suite $(p_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(g)$.
