

# Chapitre 7 — séries de fonctions

## 1 Convergence simple

Séries de fonctions. Sommes partielles.

Convergence simple (c'est la convergence simple de la suite des sommes partielles). Somme et restes.

Liens avec la convergence simple des suites de fonctions, notamment via la série des différences.

Exemples fournis par les séries de référence (séries géométriques, série exponentielle, séries de Riemann et fonction  $\zeta$ ).

Exemples fournis par le théorème des séries alternées.

## 2 Convergence uniforme et convergence normale

### 2.1 Convergence uniforme

Définition (convergence uniforme de la suite des sommes partielles). La convergence uniforme implique la convergence simple.

Caractérisation : la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement elle converge simplement sur  $I$  et la suite de ses restes converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.

Exemples et contre-exemples. Liens avec les suites de fonctions.

### 2.2 Convergence normale

Définition. Exemples et contre-exemples.

### 2.3 Lien entre ces modes de convergence

La convergence normale de la série de fonctions  $\sum u_n$  implique la convergence simple de la série de fonctions  $\sum |u_n|$  ainsi que la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum u_n$ .

Exemples et contre-exemple de la réciproque (avec une série alternée).

## 3 Théorèmes sur les séries de fonctions

### 3.1 Théorème de continuité

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur l'intervalle  $I$ ;
- la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $I$ .

Conclusion : la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est définie et continue sur l'intervalle  $I$ .

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

Complément hors programme : théorème de la double limite.

### 3.2 Théorème d'intégration terme à terme

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur le segment  $[a, b]$ ;
- la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur le segment  $[a, b]$ .

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(t) dt$  converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt \right).$$

### 3.3 Théorème de dérivation terme à terme

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ;
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ ;
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Conclusion : la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ .

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

Version  $\mathcal{C}^k$ .

## 4 Un exemple de référence : la fonction zêta de Riemann

On étudie la fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

On prouve notamment qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

## 5 Méthodes

### 5.1 Travillons avec des séries alternées

Où l'on voit que le théorème des séries alternées permet d'obtenir facilement de la convergence uniforme.

Exemple : dérivation de la fonction  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right)$  sur  $[0, +\infty[$ .

### 5.2 Comparaison avec des intégrales

Où l'on voit que les encadrements par des intégrales permettent parfois d'obtenir des équivalents de sommes de séries de fonctions.

Exemple : équivalent de  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$  quand  $x$  tend vers 1. Si on a le temps, équivalent de  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$  quand  $x$  tend vers 0.

## Programme de colles n° 4 (du lundi 8 au vendredi 19 novembre 2021)

Tout sur les chapitres 6 (suites de fonctions) et 7 (séries de fonctions).

### Questions de cours

1. Énoncé du théorème de continuité pour les sommes de séries de fonctions.
2. Énoncé du théorème d'intégration terme à terme sur un segment.
3. Énoncé du théorème de dérivation terme à terme pour les sommes de séries de fonctions.
4. Définition de la convergence uniforme pour les suites de fonctions. Théorème de continuité pour les suites de fonctions
5. Définition de la convergence uniforme pour les séries de fonctions.
6. Définition de la convergence normale pour les séries de fonctions.