

**Exercice 1. (\*)** On fixe  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto x^\alpha e^{-n^\beta x^\gamma}$$

sur  $[0, +\infty[$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Cette convergence est-elle uniforme ?

**b.** Soit  $a > 0$ . Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**Exercice 2. (\*)** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**b.** Y a-t-il convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  ? sur  $[0, +\infty[$  ? sur les segments de  $[0, +\infty[$  ?

**Exercice 3. (\*)** On fixe  $\alpha > 0$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{(nx)^\alpha}{1 + nx^2}$$

sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$ .

**b.** Étudier la convergence uniforme.

**Exercice 4. (\*\*)** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

**a.** Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction exponentielle.

**b.** Justifier que cette convergence est uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

Pour cela, on prouvera la majoration  $e^x - e^y \leq e^x(x - y)$  sous l'hypothèse  $x \geq y$  et on étudiera les variations de la fonction  $\varphi : t \mapsto t - \ln(1 + t)$ .

**Exercice 5. (\*\*)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle dont les termes sont dans  $[0, 1]$ . On suppose que cette suite converge et sa limite est notée  $\ell$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies et continues sur  $[0, 1]$ . On suppose que cette suite de fonctions converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $g$ .

Montrer que la suite  $(f_n(a_n))_{n \geq 0}$  converge vers le nombre  $g(\ell)$ .

**Exercice 6. (\*\*\*)** Construire une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles positives, telle que la suite  $(\int_0^1 f_n)_{n \geq 0}$  tende vers 0 mais telle que la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  ne tende vers 0 pour aucune valeur de  $x$ .

**Exercice 7. (\*\*)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui s'annule en 1.

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n : x \mapsto x^n f(x)$  sur  $[0, 1]$ .

Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle.