

Exercice 1. (*) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n^2 + 1}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. (*) Pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f continue. Pour cela, on se ramènera à l'étude d'une série de fonctions.

Exercice 3. (*) Pour tout n dans \mathbb{N}^* et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note f la somme de cette série de fonctions.

b. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

c. Converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

d. La fonction f est-elle continue sur $[0, +\infty[$? est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 4. ()** On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2 x}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

c. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 5. ()** On pose

$$f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} .

b. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

c. On se propose de prouver que la fonction f n'est pas dérivable en 0. On raisonne par l'absurde en supposant que f est dérivable en 0.

Prenons N dans \mathbb{N}^* . Pour tout $x > 0$, prouver l'inégalité

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 par valeurs strictement positives? Conclure.

d. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.