Exercice 1. **Inégalités de Hölder et de Minkowski**

On fixe p dans $]1,+\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

et on définit $||x||_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $||\ ||_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1,+\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer *l'inégalité de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant ||x||_p ||y||_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y.

Question 5. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant ||x||_p \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}.$$

b. Majorer de même la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

c. En déduire *l'inégalité de Minkowski* $||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.

d. Qu'a-t-on démontré ?

Question 6. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $||x||_p$ tend vers $||x||_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite u de ℓ^p, on pose

$$\mathrm{N}_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

Question 7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p.

Question 9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \mathrm{N}_p(u)\mathrm{N}_q(v).$$

Exercice 2. (*) On définit une suite (P_n) de fonction sur $[0,1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}.$$

Pour tout x dans $[0,1]$, on définit aussi la fonction $g_x : t \mapsto t + (x - t^2)/2$.

Enfin, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0,1]$.

2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver que P_n est dérivable et obtenir l'identité

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}'_n(x)(1 - \mathrm{P}_n(x)).$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0,1]$.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

6. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 3. (**) Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On note d son degré et on introduit ses coefficients par la formule

$$\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{d} q_k\, \mathrm{X}^k.$$

En particulier, le coefficient dominant q_d est non nul.

On considère alors l'élément $q = (q_0, \ldots, q_d)$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.

a. Montrer qu'il existe des éléments $x_1, \ldots, x_d$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ tels que la famille $(q, x_1, \ldots, x_d)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Dans la suite, on suppose fixés de tels éléments et on introduit leurs coefficients par la formule

$$x_j = (x_{j,0}, \ldots, x_{j,d}).$$

Étant donné un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, dont les coefficients sont donnés par

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, \mathrm{X}^k,$$

on pose

$$\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \left| \frac{1}{(q_0)^2 + \cdots + (q_d)^2} \sum_{k=0}^{d} q_k a_k + \sum_{k=d+1}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{j=1}^{d} \left| \sum_{k=0}^{d} x_{j,k}\, a_k \right| + \sum_{k=d+1}^{+\infty} \left| \frac{a_k}{k} \right|.$$

b. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

c. Montrer que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme Q pour la norme N.

d. Application numérique. Trouver une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + 3$.
