

Exercice 1. (*) Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a_k)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 2. (*) Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_1 : x \mapsto x \quad f_2 : x \mapsto x^2 \quad f_3 : x \mapsto x \ln(x) \quad f_4 : x \mapsto x^2 \ln(x)$$

forment une famille libre.

Exercice 3. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Démontrer l'égalité $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$.

Exercice 4. (*) Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer l'égalité $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$.

Exercice 5. (*) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} &\iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2); \\ \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = E &\iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2). \end{aligned}$$

On note g l'endomorphisme de $\text{Im}(f)$ induit par f . Que signifient ses égalités pour g ?

Exercice 6. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont de dimension finie. Démontrer l'encadrement suivant

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

Exercice 7. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E et on fait les hypothèses suivantes

$$f + g = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E).$$

Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E . Montrer de plus que f et g sont les projecteurs associés.

Exercice 8. (*)** Soient V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel. On pose

$$L_1 = \{f \in \mathcal{L}(E, F) ; f|_W = 0\} \quad \text{et} \quad L_2 = \{f \in \mathcal{L}(E, F) ; f|_V = 0\}.$$

Montrer que L_1 et L_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 9. ()** Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . Montrer que si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, dont on exprimera le noyau et l'image en fonction de ceux de p et de q .

Exercice 10. (*) a. Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer l'égalité

$$\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f).$$

Pour cela, on considérera la restriction de g à $\text{Im}(f)$.

b. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E . Montrer que la suite de terme général $\rho_k = \text{rg}(f^k) - \text{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

Montrer de plus que les termes de cette suite sont nuls à partir d'un certain rang p .

c. Montrer que $F = \text{Ker}(f^p)$ et $G = \text{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E .

d. Vérifier que F et G sont stables par f .

e. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de F et de G induits par f . Montrer que $(f_1)^p$ est nul et que f_2 est bijectif.

Exercice 11. (*) On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse $M^2 = N$

a. Justifier que M laisse stables $\text{Ker}(N)$ et $\text{Im}(N)$.

b. Déterminer le noyau et l'image de N . Qu'en déduit-on quant aux coefficients de M ?

c. Conclure.

Exercice 12. ()** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donc la dimension est notée n . Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que f est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que f^k soit l'endomorphisme nul de E . L'indice de nilpotence de f est l'entier

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} ; f^k = 0\}.$$

a. On prend x_0 dans $E \setminus \text{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F}_{x_0} = (f^{p-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$$

est libre.

b. En déduire une inégalité entre p et n .

c. Dans cette question, on suppose que p est égal à n . En choisissant x_0 comme à la question a, la famille \mathcal{F}_{x_0} est alors une base de E .

Écrire la matrice représentative de f relativement à cette base.

Exercice 13. ()** Une matrice *triangulaire supérieure stricte* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

a. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^n est la matrice nulle.

b. (***) Réciproquement, montrer que toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (raisonner par récurrence sur n).

c. Retrouver le résultat de la question b de l'exercice précédent.

Exercice 14. (*)** Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in L(E, G)$ et $v \in L(F, G)$.

Montrer que l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$ a lieu si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $u = v \circ h$.

Exercice 15. ()** Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q . Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{L}(E) ; u(F) \subset G\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et calculer sa dimension.

Pour cela, on établira un isomorphisme entre \mathcal{E} et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en représentant les endomorphismes de E dans deux bases bien choisies.

Exercice 16. (*) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 17. (*) Montrer que la matrice $A = (\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est de rang 2.

Exercice 18. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. (*) Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $\llbracket 1, n \rrbracket$, montrer l'égalité

$$E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}.$$

b. (**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'égalité $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$ a lieu pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire un multiple de la matrice I_n).

Exercice 19. ()** On considère deux matrices A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20. ()** On fixe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit l'endomorphisme $\Phi_A : X \mapsto XA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer la trace de Φ_A .

Exercice 21. ()** On considère une matrice $M = (m_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.

Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul. Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Exercice 22. (*) On fixe n dans \mathbb{N}^* et pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres coefficients valent b .

a. On pose $J = \frac{1}{n}M(1, 1)$ et $K = I - J$. Calculer J^2 , K^2 , $J \times K$ et $K \times J$.

b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la matrice $M(a, b)$ comme combinaison linéaire de J et K . En déduire le calcul de $M(a, b)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c. Développer le produit $M(a, b)M(c, d)$ et en déduire que l'ensemble $\mathcal{M} = \{M(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est stable par produit.

d. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice $\alpha J + \beta K$ est inversible si et seulement si α et β sont non nuls. Préciser son inverse en cas d'existence.

e. En déduire une CNS d'inversibilité pour $M(a, b)$ et vérifier que son inverse est aussi dans \mathcal{M} dans le cas d'existence.

Exercice 23. (*)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui soit à la fois un supplémentaire de F et de G dans E .

Exercice 24. ()** Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer les inégalités

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v)) \quad \text{et} \quad \text{rg}(v \circ u) \geq \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \dim(F).$$

Exercice 25. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que l'égalité $\text{rg}(A) = 1$ équivaut à l'existence de vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $A = X \cdot {}^tY$.

b. On note r le rang de A .

Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ tels que

$$A = \sum_{k=1}^r X_k \cdot {}^tY_k.$$

Exercice 26. (*) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 27. (*) Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \max(i, j)$.

Exercice 28. (*) Pour tout n dans \mathbb{N}^* et tout z dans \mathbb{C}^* , calculer le déterminant de la matrice $M_n(z)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent $z + \frac{1}{z}$, les coefficients qui bordent la diagonale valent 1, et les autres sont nuls.

Exercice 29. (*) Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$.

Exercice 30. (*) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité $\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - B^2)$.

Exercice 31. ()** Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'égalité $\det(C + M) = \det(M)$ a lieu pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que C est nulle.

Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que C n'est pas nulle : on extrait une colonne non nulle de C et on la complète en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis on construit une matrice M non inversible telle que $C + M$ soit inversible.

Exercice 32. (*) Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $T : M \mapsto {}^t M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 33. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 34. On fixe un entier $n \geq 2$.

1. (*) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la fonction

$$f_{A,B} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \det(A + tB)$$

est une fonction polynomiale.

Montrer de plus que le degré de $f_{A,B}$ est majoré par le rang de B et que le degré de $f_{A,B}$ vaut n si B est inversible.

2. (***) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}$.

b. On prend α et β distincts dans \mathbb{K} et on prend $A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & \gamma_n \end{pmatrix}$. Exprimer la fonction $f_{A,J}$ et en

déduire une expression du déterminant de A .

3. (***) On considère quatre matrices A, B, C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. On suppose que A et C commutent.

a. On suppose dans cette question que A est inversible. Montrer l'égalité $\det(M) = \det(AD - CB)$.

b. Montrer cette égalité dans le cas où A n'est pas nécessairement inversible. On pourra pour cela introduire la fonction de \mathbb{K} dans \mathbb{K} qui à λ associe le déterminant de la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

c. Quelle formule obtient-on si A est inversible mais ne commute pas avec C ?

Exercice 35. ()** Soit un entier $n \geq 2$. On pose $\omega = \exp(i2\pi/n)$.

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

a. Calculer un argument du déterminant de A .

b. Calculer $\bar{A} \times A$. En déduire la valeur du déterminant de A .