

Chapitre 8 — algèbre linéaire

1 Calcul matriciel

1.1 Produit matriciel

Rappels sur le produit d'une matrice par une colonne et sur le produit de deux matrices. Voir chapitre 1.

1.2 Méthodes du pivot : traductions matricielles

Traduction des opérations par des produits matriciels : voir chapitre 1, paragraphe 4.

1.3 Représentation matricielle des vecteurs

Codage d'un vecteur dans une base. Codage d'une famille de vecteurs dans une base.

Matrices de passage.

Formule de changement de base $M_{\mathcal{D}}(x) = M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) \times M_{\mathcal{E}}(x)$.

1.4 Représentation des applications linéaires

Matrice d'une application linéaire (définition par les colonnes). Variante avec les lignes.

Image d'un vecteur par une application linéaire.

Lien entre composition d'applications linéaires et produit matriciel.

Formule de changement de bases $M_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a) = (M_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}'))^{-1} \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$.

Cas des endomorphismes. Matrices semblables.

1.5 Noyau et image d'une matrice

L'application linéaire canoniquement associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'application $f_A : X \mapsto A \times X$, définie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Théorème du rang.

Le noyau et l'image de la matrice A sont ceux de f_A . En particulier, l'image de A est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Trouver le noyau de A revient à trouver les combinaisons linéaires nulles de ses colonnes.

Détermination de bases par la méthode du pivot sur les colonnes.

2 Produits d'espaces vectoriels

2.1 Définition

2.2 Cas de la dimension finie

Base de $E_1 \times \dots \times E_p$. Dimension.

2.3 Complément : produits d'espaces vectoriels normés

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, alors la fonction

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto N_1(x_1) + \dots + N_p(x_p)$$

est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

3 Trace

3.1 Définition

Trace d'une matrice carrée. C'est une forme linéaire. Formule $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

3.2 Trace d'un produit

Formule $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

3.3 Trace d'un endomorphisme

Formule $\text{tr}(P^{-1}MP) = \text{tr}(M)$. Lien avec les changements de bases.

Trace d'un endomorphisme. Formule $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$.

3.4 Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang. Trace d'une symétrie.

3.5 Produit scalaire sur les espaces de matrices

La fonction $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T \cdot B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition (espace engendré par la réunion). Caractérisation (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec x_i dans E_i).

L'application linéaire $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, définie de $E_1 \times E_2$ vers E , a pour image $E_1 + E_2$.

Famille génératrice. Formule $\dim(E_1 + E_2) \leq \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

La formule du rang pour f donne la formule de Grassmann.

4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition. Caractérisation (intersection triviale). Lien avec les familles libres.

Cas de la dimension finie : si E_1 et E_2 sont en somme directe, alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Réciproque : si $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$, alors E_1 et E_2 sont en somme directe.

Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs associés.

4.3 Généralisation de la notion de somme

Somme $E_1 + \dots + E_p$, définie comme le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion $E_1 \cup \dots \cup E_p$. C'est l'image de l'application linéaire

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p,$$

définie de $E_1 \times \dots \times E_p$ vers E .

On obtient une famille génératrice de la somme en concaténant des familles génératrices des E_i .

Inégalité $\dim(E_1 + \dots + E_p) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$.

4.4 Généralisation de la notion de somme directe

Somme directe $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ (ça équivaut à ce que l'application f définie plus haut soit injective). Caractérisation : la somme est directe si, et seulement si, la seule décomposition du vecteur nul dans la somme $E_1 + \dots + E_p$ est la décomposition triviale.

Lien avec les familles libres.

Caractérisation par les dimensions.

Caractérisation : la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si, et seulement si, la somme $E_1 + \dots + E_{p-1}$ est directe et a une intersection triviale avec E_p .

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont tous distincts, alors la somme $\text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E) + \dots + \text{Ker}(u - \lambda_p \text{Id}_E)$ est directe.

4.5 Sous-espaces supplémentaires

Définition. Caractérisation avec l'application f définie plus haut. Caractérisation par les bases. Caractérisation par les dimensions.

Famille de projecteurs associés.

5 Matrices par blocs

5.1 Définition et propriétés

Écriture d'une matrice par blocs. Produit de deux matrices par blocs.
Cas des matrices diagonales par blocs ; des matrices triangulaires par blocs.

5.2 Méthode du pivot par blocs

Détermination du rang des matrices $\begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (dans le cas où A est inversible).

5.3 Sous-espaces stables

Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
Caractérisation matricielle : interprétation des matrices triangulaires par blocs ; diagonales par blocs.
Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors chacun laisse stables le noyau et l'image de l'autre.
Idem pour des matrices.

6 Déterminant

6.1 Rappels

« Définition » du déterminant d'une matrice (unique fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ linéaire selon chaque colonne, antisymétrique selon les colonnes, telle que $f(I_n) = 1$). Déterminant d'un endomorphisme.

Règles opératoires (multilinéarité, caractère alterné, développement selon une ligne ou une colonne, déterminant d'un produit, déterminant de l'inverse). Matrices tridiagonales.

6.2 Déterminant de Vandermonde

Le déterminant de la matrice $((a_i)^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ vaut $\prod_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)$.

6.3 Déterminant d'une matrice par blocs

Déterminant des matrices triangulaires par blocs. Exercice : calcul de $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sous certaines hypothèses.

6.4 Déterminant et polynômes

Développement de $\det(A + tB)$ (exercice 34). Cas particulier de $\det(tI_n - M)$.

Programme de colles n° 5 (du lundi 22 novembre au vendredi 3 décembre 2021)

Toute l'algèbre linéaire de première année et le contenu du chapitre 8.

Questions de cours

1. Représentation matricielle d'un vecteur relativement à une base : définition. Formule de changement de base pour les représentations de vecteurs : énoncé et démonstration.
2. Représentation matricielle d'une application linéaire relativement à deux bases : définition. Mise en pratique sur un exemple (simple) choisi par l'interrogateur.
3. Définition de la trace. Démonstration de l'identité $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
4. Développement d'un déterminant relativement à une colonne : énoncé. Mise en pratique sur une matrice tri-diagonale.
5. Définition de « la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe ». Caractérisation en termes de décomposition du vecteur nul : énoncé. Caractérisation en termes de bases des E_k : énoncé.