PC* — mathématiques **jeudi 25 novembre 2021**
Devoir surveillé n° 3 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On admet que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ quand n tend vers $+\infty$.

On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$.

Partie I

Question 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Sa valeur est notée I.

Question 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Sa valeur est notée J.

Question 3. Montrer que la fonction φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et trouver une expression de sa bijection réciproque.

Question 4. Prouver que la fonction φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Question 5. Effectuer le changement de variable $x = \varphi^{-1}(u)$ dans l'intégrale J et en déduire une relation entre I et J.

Partie II

Question 6. Pour tout x dans $]-1,+\infty[$, prouver l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$.

Question 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout t dans $[0,\sqrt{n}]$, prouver l'encadrement

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1}.$$

Question 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}/\tan(u)$, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Question 10. Prouver que I vaut $\sqrt{\pi}$.

Question 11. En déduire la valeur de J.

Exercice 2. Dans ce problème, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E — pas forcément de dimension finie.

Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ (par exemple, la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

L'ensemble des formes linéaires sur E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, appelé *dual* de E et noté E^*. La forme linéaire nulle sur E est notée 0^*.

Étant donné un sous-espace vectoriel H de E, dire que H est un *hyperplan* de E signifie que H possède un supplémentaire de dimension 1 dans E.

Autrement dit, cela signifie qu'il existe un vecteur a de E non nul tel que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Première partie — généralités

Question 12. Soit H un hyperplan de E. Pour tout vecteur b de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$, prouver l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(b)$.

Question 13. Soit ℓ une forme linéaire sur E différente de 0^*. Soit a un vecteur de E tel que $\ell(a) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

On pose $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\ell)$. Montrer alors que H est un hyperplan et que $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire de H dans E.

Exprimer la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à H.

Question 14. Réciproquement, soient H un hyperplan de E et a un vecteur non nul de E tel que

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a).$$

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note $\ell(x)$ l'unique $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x - \lambda a \in \mathrm{H}$.

Montrer que ℓ est une forme linéaire non nulle sur E et que son noyau est H.

Question 15. Soit H un hyperplan. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur E de noyau H.

Montrer qu'il existe μ non nul dans $\mathbb{K}$ tel que $\ell_2 = \mu \ell_1$.

Deuxième partie — bases duales

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie et sa dimension est notée n.

On considère une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Pour tout x dans E et tout indice i de $[\![1, n]\!]$, on note $e_i^*(x)$ le coefficient devant e_i dans la décomposition de x relativement à la base $\mathcal{E}$, de sorte que

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix}.$$

Question 16. Pour toute forme linéaire ℓ sur E, démontrer l'égalité $\ell = \sum\limits_{i=1}^{n} \ell(e_i) e_i^*$.

Question 17. En déduire que la famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

On la note $\mathcal{E}^*$ et on l'appelle *base duale* de la base $\mathcal{E}$. On notera en particulier que E^* est de dimension n.

Question 18. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs

$$b_1 = (1, 2), \quad b_2 = (2, -3).$$

On note alors $\mathcal{B}$ la famille (b_1, b_2).
Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa base duale $\mathcal{B}^*$.

Question 19. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Montrer l'égalité $(\mathrm{P}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$.

Exercice 3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $]0, +\infty[$, on pose

$$g_n(x) = \frac{n! \times n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \ln(g_n(x)).$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln(n) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On admet que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ.

Question 20. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2}(f_n - f_{n-1})$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Question 21. En déduire que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur cet intervalle. On note G sa limite simple, définie par

$$\mathrm{G}(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x).$$

Question 22. Pour tout $x > 0$, montrer la formule

$$\ln(\mathrm{G}(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right),$$

où γ est la constante d'Euler.

Question 23. En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée.

Question 24. Exprimer $\mathrm{G}'(1)$ en fonction γ.

Question 25. Prouver que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
