PC* — mathématiques **jeudi 25 novembre 2021**
Devoir surveillé n° 3 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On admet que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ quand n tend vers $+\infty$.

On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$.

Partie I

Question 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Sa valeur est notée I.

Question 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Sa valeur est notée J.

Question 3. Montrer que la fonction φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et trouver une expression de sa bijection réciproque.

Question 4. Prouver que la fonction φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Question 5. Effectuer le changement de variable $x = \varphi^{-1}(u)$ dans l'intégrale J et en déduire une relation entre I et J.

Partie II

Question 6. Pour tout x dans $]-1,+\infty[$, prouver l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$.

Question 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout t dans $[0,\sqrt{n}]$, prouver l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\ \mathrm{W}_{2n+1}.$$

Question 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}/\tan(u)$, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Question 10. Prouver que I vaut $\sqrt{\pi}$.

Question 11. En déduire la valeur de J.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de prouver le *théorème de Borel*, qui affirme que pour tout suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait l'égalité $f^{(n)}(0) = u_n$.

On considère une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \quad \forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \quad \varphi(x) = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(k)}(0) = 0. \end{cases}$$

L'existence d'une telle fonction est ici admise.

On se donne une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.

Question 12. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, justifier l'existence du nombre réel

$$\lambda_p = \max_{k\in\{0,\dots,p-1\}} \max_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|.$$

Question 13. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\beta_n = \max(1, 4^n \lambda_n |u_n|)$$

et on définit une fonction g_n par

$$g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x).$$

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est nulle en dehors du segment $[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}]$.

b. Soient j et n dans $\mathbb{N}$ tels que $j < n$. Montrer l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

En déduire que $g_n^{(j)}(0)$ est nul.

c. Pour tout x réel tel que $|x| \geqslant \frac{1}{\beta_n}$, montrer que $g_n^{(j)}(x)$ est nul.

d. Pour tout x réel tel que $|x| \leqslant \frac{1}{\beta_n}$, montrer la majoration $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant 2^{-(n+1)}$.

e. Pour tout couple (j, n) d'entiers naturels, montrer l'égalité

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Question 14. Montrer l'existence de la fonction

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n,$$

et montrer qu'elle vérifie les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(0) = u_n.$$

Exercice 3. Dans ce problème, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E — pas forcément de dimension finie.

Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ (par exemple, la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

L'ensemble des formes linéaires sur E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, appelé *dual* de E et noté E^*. La forme linéaire nulle sur E est notée 0^*.

Étant donné un sous-espace vectoriel H de E, dire que H est un *hyperplan* de E signifie que H possède un supplémentaire de dimension 1 dans E.

Autrement dit, cela signifie qu'il existe un vecteur a de E non nul tel que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Première partie — généralités

Question 15. Soit H un hyperplan de E. Pour tout vecteur b de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$, prouver l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(b)$.

Question 16. Soit ℓ une forme linéaire sur E différente de 0^*. Soit a un vecteur de E tel que $\ell(a) \neq 0_{\mathrm{E}}$.

On pose $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\ell)$. Montrer alors que H est un hyperplan et que $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire de H dans E.

Exprimer la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à H.

Question 17. Réciproquement, soient H un hyperplan de E et a un vecteur non nul de E tel que

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a).$$

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note $\ell(x)$ l'unique $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x - \lambda a \in \mathrm{H}$.

Montrer que ℓ est une forme linéaire non nulle sur E et que son noyau est H.

Question 18. Soit H un hyperplan. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur E de noyau H.

Montrer qu'il existe μ non nul dans $\mathbb{K}$ tel que $\ell_2 = \mu \ell_1$.

Deuxième partie — bases duales

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie et sa dimension est notée n.

On considère une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Pour tout x dans E et tout indice i de $[\![1, n]\!]$, on note $e_i^*(x)$ le coefficient devant e_i dans la décomposition de x relativement à la base $\mathcal{E}$, de sorte que

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix}.$$

Question 19. Pour toute forme linéaire ℓ sur E, démontrer l'égalité $\ell = \sum\limits_{i=1}^{n} \ell(e_i) e_i^*$.

Question 20. En déduire que la famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

On la note $\mathcal{E}^*$ et on l'appelle *base duale* de la base $\mathcal{E}$. On notera en particulier que E^* est de dimension n.

Question 21. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs

$$b_1 = (1, 2), \quad b_2 = (2, -3).$$

On note alors $\mathcal{B}$ la famille (b_1, b_2).

Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa base duale $\mathcal{B}^*$.

Question 22. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Montrer l'égalité $(\mathrm{P}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$.

Troisième partie — bidual et bases antéduales

On revient provisoirement au cas où E est de dimension quelconque — finie ou infinie.

Le dual de E^* est noté E^{**} et appelé *bidual* de E.

Pour tout vecteur x de E, l'application $\hat{x} : \ell \mapsto \ell(x)$ est un élément de E^{**}.

Question 23. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto \hat{x}$ est linéaire et injective.

Question 24. Dans le cas où E est de dimension finie, justifier que φ est un isomorphisme.

Dans la suite, on suppose de nouveau que E est de dimension finie et on note sa dimension n.

Question 25. On considère une base $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^* et sa base duale $\mathcal{L}^* = (\ell_1^*, \ldots, \ell_n^*)$.
On peut alors définir des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad e_i = \varphi^{-1}(\ell_i^*).$$

Justifier que la famille $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que sa base duale est $\mathcal{L}$.

Cette base $\mathcal{E}$ s'appelle *la base antéduale* de $\mathcal{L}$.

Question 26. Soit $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ une base de E^*. On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base antéduale.

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\ell_i) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Question 27. Réciproquement, on considère une famille $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de n formes linéaires sur E et on fait l'hypothèse

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\ell_i) = \{0_\mathrm{E}\}.$$

On définit l'application linéaire $f : x \mapsto (\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x))$ de E dans $\mathbb{K}^n$.

Montrer que f est un isomorphisme et à l'aide des antécédents des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, montrer que $\mathcal{L}$ est une base de E^*.

Quatrième partie — un exercice sur les polynômes

On considère un entier n strictement positif et on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire

$$\ell_a : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(a)$$

sur E.

Question 28. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (\ell_0, \ldots, \ell_{n-1})$ est une base de E^*. On pourra utiliser le critère démontré dans la partie précédente.

On introduit alors la décomposition de la forme linéaire ℓ_n dans cette base

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \ \ell_i.$$

Question 29. Pour tout polynôme P de E, prouver l'égalité $\mathrm{P}(\mathrm{X} + n) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \ \mathrm{P}(\mathrm{X} + i)$.

Question 30. Dans cette question, on prend $n = 3$. Déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.