Exercice 1. (*) Déterminer les éléments propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}3&0&0\\-5&2&0\\4&0&1\end{pmatrix}.$$

On donne $\chi_{\mathrm{C}}=\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-10\mathrm{X}+8$ et $\chi_{\mathrm{D}}=\mathrm{X}^3-7\mathrm{X}^2+16\mathrm{X}-12$.

Exercice 2. (*) On fixe un entier $n\geqslant 2$. La matrice I_n est notée I.

a. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer ses éléments propres. Est-elle diagonalisable ?

b. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on note $\mathrm{M}(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent a, les autres valant b. Montrer que $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable et calculer son déterminant.

c. Exprimer les puissances de $\mathrm{M}(a,b)$ comme combinaison linéaire de I et J

Exercice 3. (**) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f.

a. Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont exactement les valeurs propres non nulles de $\tilde{f}$.

b. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de f. Montrer alors l'égalité $\mathrm{E}_\lambda(f)=\mathrm{E}_\lambda(\tilde{f})$.

Exercice 4. (*) Dans cet exercice, l'entier n est supérieur ou égal à 3. On pose $\mathrm{M}=(\delta_{i,n}+\delta_{j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a. Déterminer le noyau de M. Qu'en déduit-on sur les éventuelles valeurs propres non nulles de M ?

b. Montrer que l'application $\varphi:\mathrm{U}\mapsto\mathrm{MU}$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$.
Écrire la matrice de φ relativement à une base bien choisie de $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$. En déduire les éléments propres de φ.

c. Montrer que la matrice M est diagonalisable et proposer une matrice de passage.

Exercice 5. (*) Soit un entier $n\geqslant 2$. On pose $f(\mathrm{P})=(\mathrm{X}^2-\mathrm{X})\mathrm{P}(1)+(\mathrm{X}^2+\mathrm{X})\mathrm{P}(-1)$ pour tout P dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer son noyau, son image, ses éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 6. (**) On fixe un entier n strictement positif.

Pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P})=\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'-n\mathrm{XP}$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer les éléments propres de Φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 7. (**) On note $\mathrm{E}=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on définit sur $[0,1]$ une fonction, notée $\mathrm{T}(f)$, par la formule

$$\mathrm{T}(f)(x)=\int_0^1\min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est un endomorphisme de E.

b. Déterminer les espaces propres de T.

Exercice 8. (*) À quelle condition la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&2&f\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 9. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $\mathrm{M}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{M}(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs de z, que l'on déterminera. Pour cela, on cherchera les éventuelles racines multiples de son polynôme caractéristique.

Exercice 10. (**) On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose triangulaire. On suppose que les coefficients diagonaux sont donnés par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad a_{k,k} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Déterminer la matrice A^n.

Exercice 11. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair et que la trace de A est nulle. Que vaut le déterminant de A ?

Exercice 12. (*) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{K}^n$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ et on lui associe la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est le polynôme P. Pour le calculer, on effectuera une seule opération sur les colonnes.

b. Calculer la dimension des espaces propres de A.

c. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Exercice 13. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$.

a. Prouver l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{Y} - \mathrm{X}_1 \end{pmatrix} \ ; \ (\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Ker}(\mathrm{A}) \right\}.$$

En déduire la relation $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{B})) = n + \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))$.

b. Soit λ dans $\mathbb{C}^*$. Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)$ pour un certain μ de $\mathbb{C}^*$. Pour cela, on résoudra l'équation $\mathrm{BY} = \lambda \mathrm{Y}$ en écrivant le vecteur colonne Y sous la forme

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2.$$

En déduire quelles sont les valeurs propres non nulles de B en fonction de celles de A.

c. Trouver une relation entre les nombres

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \dim(\mathrm{E}_\mu(\mathrm{A})).$$

d. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable.

Exercice 14. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Soit λ dans $\mathbb{C}$. Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n)$.

b. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable et inversible.
