Problème I — Polynômes de matrices

On fixe un entier n strictement positif. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on définit une matrice P(M) de la manière suivante : si P s'écrit

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k,$$

alors la matrice P(M) est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenu en remplaçant le symbole X par M, c'est-à-dire

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{M}^k = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{M} + \cdots + a_d \mathrm{M}^d.$$

On admet l'identité suivante

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in (\mathbb{C}[\mathrm{X}])^2, \qquad (\mathrm{P} \times \mathrm{Q})(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{Q}(\mathrm{M}).$$

En particulier, pour une matrice M donnée, on en déduit que les polynômes en M sont des matrices qui commutent deux à deux.

Étant donné une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un polynôme complexe P, dire que P est *un polynôme annulateur de* M signifie que la matrice P(M) est nulle. Ainsi, le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice carrée.
L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice carrée M est noté Ann(M).

Partie I — structure de l'ensemble des polynômes annulateurs

Dans cette partie, on fixe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 1. Vérifier que l'ensemble Ann(M) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

Question 2. Pour tout élément P et Ann(M) et tout élément Q de $\mathbb{C}[X]$, prouver que $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ est un élément de Ann(M).

Question 3. Justifier que la famille $(\mathrm{M}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est liée. En déduire que Ann(M) possède au moins un élément non nul.

Question 4. Soient A et B deux éléments non nuls de Ann(M). On note Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B. Montrer que R est un élément de Ann(M).

Question 5. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \; ; \; \exists \mathrm{P} \in \mathrm{Ann}(\mathrm{M}), \; \deg(\mathrm{P}) = k\}$ possède un plus petit élément. Ce minimum est noté d.

Question 6. Montrer que M possède un polynôme annulateur unitaire[1] de degré d. Montrer de plus qu'un tel polynôme est unique.

Ce polynôme sera noté μ_{M}. C'est le *polynôme minimal* de la matrice M.

Question 7. Montrer que l'ensemble Ann(M) est l'ensemble $\{\mu_{\mathrm{M}} \times \mathrm{Q} \; ; \; \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\}$.

Partie II — polynômes interpolateurs de Lagrange

Dans cette partie, on fixe un entier k strictement positif. On introduit des éléments $x_0, \ldots, x_k$ de $\mathbb{C}$ deux à deux distincts et on forme le polynôme

$$\mathrm{P} = \prod_{j=0}^{k} (\mathrm{X} - x_j).$$

1. On rappelle qu'un polynôme *unitaire* est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

Pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$, on introduit le polynôme

$$\mathrm{L}_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_i - x_j}.$$

Enfin, on définit une application $\varphi : \mathbb{C}_k[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}^{k+1}$ par la formule

$$\varphi(\mathrm{Q}) = (\mathrm{Q}(x_0), \dots, \mathrm{Q}(x_k)).$$

Question 8. Justifier que φ est un isomorphisme.

Question 9. Pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$, calculer le degré du polynôme L_i et vérifier que son coefficient dominant est égal à $1/\mathrm{P}'(x_i)$.

Question 10. Pour tout couple (i,j) d'indices dans $[\![0,k]\!]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Question 11. Reconnaître la famille $(\varphi(\mathrm{L}_0), \dots, \varphi(\mathrm{L}_k))$. En déduire que la famille $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_k)$ est une base de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$.

Question 12. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$, prouver l'égalité

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Q}(x_i)\mathrm{L}_i.$$

Question 13. Écrire la matrice représentative de la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^k)$ de $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ relativement à la base $\mathcal{L}$. Donner sans démonstration la valeur du déterminant de cette matrice.

Question 14. Pour tout élément $b = (b_0, \dots, b_k)$ de $\mathbb{C}^{k+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{C}_k[\mathrm{X}]$ qui vérifie les égalités

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \qquad \mathrm{Q}(x_j) = b_j.$$

On dit que ce polynôme est solution d'un *problème d'interpolation.*

Partie III — décomposition de noyaux

On conserve les notations de la partie précédente. De plus, on considère une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cette partie est de prouver l'égalité suivante

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n).$$

Question 15. Pour tout indice i dans $[\![0,k]\!]$, prouver l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_i\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M}))$.
On en déduit l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(\mathrm{M})).$$

Le but de cette partie est donc naturellement de prouver l'inclusion réciproque. Pour cela, on procède par analyse-synthèse. On prend un élément U de Ker(P(M)) et on suppose qu'on connaît des éléments

$$\mathrm{U}_0 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_0\mathrm{I}_n), \quad \mathrm{U}_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_1\mathrm{I}_n), \quad \dots, \mathrm{U}_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - x_k\mathrm{I}_n)$$

vérifiant l'égalité $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \cdots \mathrm{U}_k$.

Question 16. Pour tout entier naturel p, prouver l'égalité

$$\mathrm{M}^p\mathrm{U} = (x_0)^p\mathrm{U}_0 + (x_1)^p\mathrm{U}_1 + \cdots + (x_k)^p\mathrm{U}_k.$$

Question 17. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$, en déduire l'égalité

$$Q(M)U = Q(x_0)U_0 + Q(x_1)U_1 + \cdots + Q(x_k)U_k.$$

Question 18. Pour tout indice i dans $[\![0, k]\!]$, prouver l'égalité $U_i = L_i(M)U$.

Ainsi se termine l'analyse du problème : il existe au plus un $(k+1)$-uplet $(U_0, \ldots, U_k)$ réalisant une décomposition de U comme ci-dessus.

Question 19. Réaliser la synthèse et prouver finalement l'égalité annoncée au début de cette partie.

Question 20. Dans cette question, on suppose que P est un polynôme annulateur de la matrice M. Montrer alors que la matrice M est diagonalisable, ce qui signifie qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de la matrice M.

Problème II — Produit de Kronecker

Soient ℓ, n, p, r quatre entiers strictement positifs. Étant donné une matrice A de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, on définit le *produit de Kronecker* par la formule

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}B & \cdots & a_{\ell,n}B \end{pmatrix},$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A. La matrice $A \otimes B$ est alors un élément de $\mathcal{M}_{\ell p, nr}(\mathbb{C})$.

Partie I — propriétés calculatoires

Question 21. Soient A dans $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et B dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Prouver l'équivalence

$$A \otimes B = 0 \iff (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$

Question 22. Prouver que l'application $(A, B) \mapsto A \otimes B$, définie de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_{\ell p, rn}(\mathbb{C})$, est bilinéaire.

Question 23. On considère deux entiers strictement positifs t et v. Soient

$$A \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}), \quad B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \quad C \in \mathcal{M}_{r,t}(\mathbb{C}), \quad D \in \mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{C}).$$

Prouver l'égalité $(A \otimes C) \times (B \otimes D) = (A \times B) \otimes (C \times D)$.

Question 24. Soient A dans $GL_n(\mathbb{C})$ et C dans $GL_p(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $A \otimes C$ appartient à $GL_{np}(\mathbb{C})$ et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et de C^{-1}.

Question 25. Application numérique : montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Question 26. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et C dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Rappeler rapidement pourquoi on peut affirmer que la matrice A est trigonalisable puis, en utilisant ce fait, démontrer l'égalité

$$\text{dét}(A \otimes C) = (\text{dét}(A))^p \times (\text{dét}(C))^n.$$

On pourra justifier que si A est semblable à une certaine matrice T, alors $A \otimes C$ est semblable à $T \otimes C$.

Question 27. Montrer que si $A \otimes C$ est inversible, alors les matrices A et C sont inversibles.

Partie II — non-commutativité du produit de Kronecker

Dans cette partie, on considère deux entiers n et p strictement positifs fixés.

On note $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Question 28. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que les matrices $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ soient distinctes.

Question 29. Trouver une matrice P de $\mathrm{GL}_{np}(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on ait

$$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P} = \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}.$$

Partie III — réduction

Dans cette partie, on fixe de nouveau des entiers n et p strictement positifs. On fixe également une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On admet la propriété suivante : si u est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est également diagonalisable.

Question 30. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable.

Question 31. Application numérique : diagonaliser la matrice suivante

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 32. Trouver un exemple dans lequel $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable mais A ne l'est pas.

Dans la suite de cette partie, on va s'attacher à démontrer une réciproque partielle de l'implication précédente.

Question 33. On factorise les polynômes caractéristiques de A et de B comme suit

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{a=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_a) \qquad \text{et} \qquad \chi_{\mathrm{B}} = \prod_{b=1}^{p} (\mathrm{X} - \mu_b).$$

Prouver que le polynôme caractéristique de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est alors le polynôme

$$\prod_{a=1}^{n} \prod_{b=1}^{b} (\mathrm{X} - \lambda_a \mu_b).$$

Question 34. Dans cette question, on suppose que A possède au moins une valeur propre non nulle. On considère une telle valeur propre, notée λ, ainsi qu'un vecteur propre U associé. On introduit la notation

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}) = \{\mathrm{U} \otimes \mathrm{V} \ ; \ \mathrm{V} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\}.$$

Montrer que E(U) est stable par $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$.

Question 35. Prouver que l'application $u : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{U} \otimes \mathrm{V}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ sur E(U).

Question 36. Dans cette question, on suppose de nouveau que A possède au moins une valeur propre non nulle. On suppose également que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable.
Prouver alors que B est diagonalisable.

Question 37. Dans cette question, on suppose que la matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est diagonalisable et qu'elle est différente de la matrice nulle.
Prouver alors que les matrices A et B sont toutes deux diagonalisables.

Question 38. Quelles sont les matrices B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?
