Exercice 1. (*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(\ln(n))} \quad ; \quad a_n = \exp(n^\alpha) \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{(n-1)^2} \quad ; \quad a_n = n^{(-1)^n}.$$

Exercice 2. (*) Prouver l'égalité $\text{rayon}(\sum u_n z^n) = \min(\text{rayon}(\sum u_{2p} z^{2p}), \text{rayon}(\sum u_{2p+1} z^{2p+1}))$.

Exercice 3. (*) On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on pose

$$c_{2p} = a^p \qquad \text{et} \qquad c_{2p+1} = b^p.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$ puis exprimer sa somme.

Exercice 4. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \sqrt{\pi(n)}\, z^n$.

Exercice 5. (**) On pose $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Encadrer H_n entre deux puissances de n et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{H}_n\, x^n$.

b. En reconnaissant un produit de Cauchy, exprimer sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

c. On rappelle que la suite de terme général $\gamma_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ possède une limite finie, notée γ. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ quand x tend vers 1.

Exercice 6. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} z^n$. Idem avec $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} z^n$.

Exercice 7. (**) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$. Généraliser.

Exercice 8. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$. Idem avec $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

Exercice 9. (**) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 10. (*) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ d'une variable réelle.

Exprimer la fonction f' à l'aide de fonctions usuelles puis exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale.

Exercice 11. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

a. Pour tout c dans $]0, 1[$, prouver la minoration $a_n \geqslant (1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 12. (*) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puis déterminer son développement au moyen d'une équation différentielle.

Exercice 13. (**) On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$, dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$ vaut au moins $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$.

Donner un exemple où R vaut $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$ et un exemple où ça n'est pas le cas.

Exercice 14. (*) On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

Exercice 15. (**) Pour tout p dans $\mathbb{N}$, montrer la propriété suivante

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{p+1}\sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n = p!\ .$$

On procédera par récurrence.

Exercice 16. (**) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe λ dans $]0,1[$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x) = f(\lambda x).$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout $\alpha > 0$, montrer les relations $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(f(x))$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\alpha x})$.

Exercice 17. (***) Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(ii) la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!\,a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

Exercice 18. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire le nombre d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f\circ f = \mathrm{Id}$. Par convention, on pose $\mathrm{I}_0 = 1$.

a. Calculer $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$.

b. (***) Pour tout entier $n\geqslant 3$, prouver la relation $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et vérifier qu'elle est encore valable pour $n = 2$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $\mathrm{I}_n \leqslant n!$ et en déduire que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!}\,x^n$$

est définie sur $]-1,1[$.

d. Pour tout x dans $]-1,1[$, trouver un lien entre $f'(x)$ et $f(x)$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ puis une expression de I_n sous forme d'une somme.
