PC* — mathématiques **jeudi 16 décembre 2021**
Devoir surveillé n° 4 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Exercice 1. **Puissances d'une matrice à coefficients strictement positifs**

Pour tout couple (x, y) de nombres réels, on considère la matrice $\mathrm{P}_{x,y} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1-y & 1+y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Question 1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ ainsi que les espaces propres associés.

Question 2. Quelles sont les valeurs de (x, y) pour lesquelles la matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ est diagonalisable ?

Pour les trois prochaines questions, on fixe x et y dans $]-1, 1[$.

Question 3. Montrer qu'il existe un élément u de $]-1, 1[$ et une matrice U de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{P}_{x,y}\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Question 4. En déduire que la suite de matrices $(\mathrm{P}_{x,y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée $\mathrm{L}_{x,y}$. Préciser le rang de cette matrice.

Question 5. Prouver l'égalité $\mathrm{L}_{x,y} = \dfrac{1}{2+x-y}\begin{pmatrix} 1-y & 1+x \\ 1-y & 1+x \end{pmatrix}$.

Pour la suite de ce problème, on fixe quatre éléments a, b, c, d de $]0, +\infty[$ et on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Question 6. Exprimer le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice A. Ce discriminant est noté Δ_{A}.

Question 7. Démontrer l'inégalité $\Delta_{\mathrm{A}} > 0$.

Question 8. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. Ces deux valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2 avec la condition $\lambda_1 > \lambda_2$.

Question 9. Démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

Question 10. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ_1 pour que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite. Cette limite est notée L dans la suite.

Question 11. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ_1 pour que L soit non nulle.

Question 12. Dans le cas où L existe et est non nulle, montrer que l'endomorphisme

$$f_{\mathrm{L}} : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{L} \times \mathrm{V}$$

de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est le projecteur sur l'espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_1}(\mathrm{A})$ parallèlement à l'espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_2}(\mathrm{A})$.

Exercice 2. **Valeurs propres non réelles des matrices réelles**

Pour tout cet exercice, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.

Question 13. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède une valeur propre non réelle λ. On pose

$$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \beta = \mathrm{Im}(\lambda). \tag{1}$$

On considère un vecteur propre V de la matrice A associé à la valeur propre λ. On note $\overline{\mathrm{V}}$ la matrice colonne obtenue à partir de V en prenant les conjugués de ses coefficients et on pose

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{V} + \overline{\mathrm{V}}), \qquad \mathrm{V}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{V} - \overline{\mathrm{V}}). \tag{2}$$

On introduit l'endomorphisme

$$f_{\mathrm{A}} : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{AU} \tag{3}$$

de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'aucun vecteur propre de A associé à la valeur propre λ ne peut appartenir à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que les vecteurs V_1 et V_2 forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$.

c. Exprimer AV_1 et AV_2 comme combinaisons linéaires de V_1 et de V_2.

d. En déduire que F est stable par l'endomorphisme f_{A}. Relativement à la base $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ de F, écrire la matrice de l'endomorphisme de F induit par f_{A}.

Question 14. On considère un espace vectoriel réel E de dimension n ainsi qu'un endomorphisme f de E. On suppose que le polynôme caractéristique de f possède une racine non réelle.
À l'aide des résultats de la question précédente, montrer qu'il existe un plan de E stable par f.

Question 15. On considère un espace vectoriel réel E de dimension n ainsi qu'un endomorphisme f de E.
Montrer qu'il existe dans E au moins une droite ou un plan stable par f.

Question 16. Trouver un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stable par la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. **Théorème de Cayley-Hamilton**

On fixe un entier $n \geqslant 2$. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que son polynôme caractéristique χ_{A} est le polynôme associé à la fonction

$$t \mapsto \mathrm{dét}(t\mathrm{I}_n - \mathrm{A}).$$

Ce polynôme est unitaire, de degré n, si bien qu'il existe des coefficients complexes $f_0, \ldots, f_{n-1}$ tels que

$$\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k \mathrm{X}^k.$$

Le but de ce problème est de prouver le théorème de Cayley-Hamilton [1], qui consiste en la relation

$$\mathrm{A}^n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k \mathrm{A}^k = 0.$$

1. Démontré dans sa généralité par Ferdinand Georg Frobenius en 1878.

Pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, on note $\mathrm{M}_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en effaçant la i-ième ligne et la j-ième colonne, puis on note $m_{i,j}$ le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_{i,j}$ et on pose $c_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$.

Les coefficients $c_{i,j}$ sont appelés *cofacteurs* de la matrice A et la matrice $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est appelée *comatrice* de la matrice A.

On rappelle le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 dans le cas contraire.

Partie I — résultats auxiliaires

Question 17. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'assertion $\mathcal{P}_k$ dont l'énoncé est :

« Pour toute famille $(\mathrm{G}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ de k^2 polynômes de $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$, si l'on considère, pour tout $x \in \mathbb{C}$, la matrice $\mathrm{G}(x) = (\mathrm{G}_{i,j}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{dét}(\mathrm{G}(x))$ est alors polynomiale, de degré inférieur ou égal à k. ».

Prouver par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_k$ est valable.

Question 18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On se donne des matrices $\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on fait l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^{p} x^k \mathrm{D}_k = 0.$$

Montrer que les matrices $\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_p$ sont nulles.

Partie II — propriétés de la comatrice

Question 19. On considère une matrice colonne $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On prend un indice $j \in [\![1, n]\!]$ et on note B_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne de A par la matrice U.

Prouver l'égalité $\mathrm{dét}(\mathrm{B}_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k c_{k,j}$.

Question 20. Pour tout couple (ℓ, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,\ell}\, c_{k,j} = \mathrm{dét}(\mathrm{A}) \times \delta_{\ell,j}$.

Question 21. En déduire l'égalité ${}^t\mathrm{C} \times \mathrm{A} = \mathrm{dét}(\mathrm{A}) \times \mathrm{I}_n$.

Partie III — démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Pour tout x dans $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{G}(x)$ la transposée de la comatrice de $x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$.

Question 22. Montrer qu'il existe des matrices $\mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_{n-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{G}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \mathrm{B}_k.$$

Question 23. En utilisant les résultats des parties précédentes, prouver les égalités matricielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{rcrcll} & & -\mathrm{B}_0\mathrm{A} & = & f_0\,\mathrm{I}_n & \\ \mathrm{B}_{k-1} & - & \mathrm{B}_k\mathrm{A} & = & f_k\,\mathrm{I}_n & \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \mathrm{B}_{n-1} & & & = & \mathrm{I}_n. & \end{array} \right.$$

Question 24. Conclure.