Chapitre 11 — passage à la limite sous l'intégrale

1 Passage à la limite sous l'intégrale

1.1 Passage à la limite sous l'intégrale par convergence uniforme sur un segment

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$.
On suppose aussi que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$ vers une certaine fonction f.

Alors la suite de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

1.2 Passage à la limite sous l'intégrale dans le cas d'un intervalle quelconque

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers $\int_{\mathrm{I}} f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

Exemples : la suite des intégrales de Wallis converge vers 0 ; exercice 2.

2 Théorèmes d'intégration terme à terme

2.1 Intégration terme à terme par convergence uniforme sur un segment

Dans le cas d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur un segment, on peut intégrer terme à terme. La convergence normale permet souvent de régler le problème très rapidement.

2.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I.
3. La somme de cette série de fonctions, notée f, est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
4. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Conclusion : la fonction f est intégrable sur l'intervalle I et son intégrale est donnée par

$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemples : égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et divergence de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

Remarquons que ce théorème n'est pas toujours opérant et qu'il est parfois judicieux de passer par la suite des sommes partielles en concluant avec la convergence dominée. Exemple de la série alternée des intégrales de Wallis.

3 Théorème de continuité sous l'intégrale

Soient I et J deux intervalles (l'intervalle I est l'ensemble des paramètres ; l'intervalle J est celui sur lequel on intègre). Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
2. Pour toute valeur du paramètre x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
3. Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, intégrable sur J et indépendante du paramètre x vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \forall t \in \mathrm{J}, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors on peut affirmer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{\mathrm{J}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Version assouplie : on peut se contenter de prouver que F est et continue sur chaque segment inclus dans I.

Exemple : la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

4 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour toute valeur du paramètre x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle J.
2. Pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
3. Pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle J.
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle J (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \forall t \in \mathrm{J}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{\mathrm{J}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et sa dérivée s'obtient en dérivant sous l'intégrale
$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Version assouplie : on peut se contenter de montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment K inclus dans I.

Généralisation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Exemple de la fonction Γ (méthode par récurrence).

Programme de colles n° 9 (du lundi 17 au vendredi 28 janvier 2022)

Tout ce chapitre.

Pas de questions de cours imposées (les théorèmes sont de toute façon à connaître pour espérer aborder les exercices).
