Exercice 1. **(*)** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ (cette intégrale est notée I dans la suite).

b. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, trouver une relation entre I_n et l'intégrale de Wallis W_{2n+1}.

c. On donne l'équivalent $\mathrm{W}_p \sim \sqrt{\pi/(2p)}$. En déduire la valeur de I.

d. Prouver l'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, admise dans un exercice du chapitre 3.

Exercice 2. **(**)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^n$.

Montrer l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^{n} \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3. **(***)** Pour tout x réel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on calculera $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) \mathrm{d}t$ et on appliquera le théorème de convergence dominée.

Exercice 4. **(*)** Pour tout (n,p) de $\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (\ln(t))^p \,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales existent.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout p dans $\mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathrm{I}(n,p)$ et $\mathrm{I}(n,p-1)$.

c. En déduire une expression explicite de $\mathrm{I}(n,p)$.

d. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \,\mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

e. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Exercice 5. **(**)** Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} \,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 6. **(**)** Soit $t \in \mathbb{R}$. On veut prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1} \,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+n^2}$.

a. Première méthode. Passer par les sommes partielles avec le théorème de convergence dominée.

b. Deuxième méthode. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Sous l'hypothèse $t > 0$, on écrira

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)|\,\mathrm{e}^{-ku} \,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)|\,\mathrm{e}^{-ku} \,\mathrm{d}u + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)|\,\mathrm{e}^{-ku} \,\mathrm{d}u.$$

et on majorera $|\sin(tu)|$ par 1 ou $|tu|$ selon ce qui est le plus pertinent.

Exercice 7. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = f'(0)$.

Vérifier l'égalité $\int_0^1 f'(xt)\ \mathrm{d}t = g(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (*) Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Dériver la fonction f. En déduire une relation entre f et g.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9. (**) On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ puis pour tout $x \in [0,+\infty[$.

d. Obtenir finalement une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout x réel.

Exercice 10. (*) Pour tout $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$, montrer l'existence de l'intégrale.

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale. Pour cela, on pourra fixer a et dériver par rapport à b.

Exercice 11. (**) On pose $\mathrm{J}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+itx}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par J puis trouver une expression simple de $\mathrm{J}(x)$.

Exercice 12. (***) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,+\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

a. Pour tout x dans $[0,+\infty[$, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

La valeur de cette intégrale est notée $\mathrm{F}(x)$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

c. Prouver que la convergence est uniforme. On pourra remarquer qu'à x fixé, la série $\sum u_n(x)$ est alternée.

d. Prouver que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$ et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

e. Prouver que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

f. En déduire une expression de la fonction F sur $[0,+\infty[$. Que vaut $\mathrm{F}(0)$?

Exercice 13. (*) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$, telle que $f(0)\neq 0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. On note sa valeur I_n.

Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14. (***) Soit $g\in\mathcal{C}^0([0,d],\mathbb{C})$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{g}(t)=\int_0^d t\mathrm{e}^{-tx}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\tilde{g}(t)$ tend vers $g(0)$ quand t tend vers $+\infty$.

On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 15. (**) On considère une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ absolument convergente et on pose $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Exercice 16. (**) On pose $a_0=1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x\in\,]-1,1[$, prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ et calculer sa somme.

Préciser ensuite le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 17. (**) $\boxed{\textbf{Intégrale de Fresnel complexe}}$

1. On considère un élément z de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On pose $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$.

1.a. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t-z}$.

1.b. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-z^2}$ et préciser sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2.c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et préciser sa valeur.
