# Problème I — Matrices stochastiques

On fixe un entier $n$ supérieur ou égal à 2.

On considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients de cette matrice sont tous *strictement* positifs. On suppose également que sur chaque ligne de cette matrice, la somme des coefficients vaut 1. En formule, cette deuxième hypothèse s'écrit

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On note U le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

**1.** Calculer le produit AU. En déduire que 1 est une valeur propre de la matrice A.

**2.** Dans cette question, on étudie les valeurs propres complexes de la matrice A.

**a.** On considère une matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose qu'elle n'est pas inversible.

On considère un élément X non nul de Ker(B), que l'on note

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier $k$ dans $[\![1,n]\!]$ vérifiant l'égalité

$$|x_k| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Prouver l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} |b_{k,j}|.$$

**b.** Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de la matrice A. En appliquant le résultat précédent à la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$, obtenir l'inégalité

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$$

puis en déduire la majoration

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

**c.** Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de la matrice A. On suppose que $\lambda$ est de module 1 et on note $\theta$ un argument de $\lambda$. On obtient donc l'inégalité

$$|a_{k,k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}.$$

En déduire l'égalité $\cos(\theta) = 1$ puis donner la valeur de $\lambda$.

**3.** Prouver que 1 est une valeur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ et que les espaces propres $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ ont la même dimension (on pourra utiliser le théorème du rang).

**4.** Dans cette question, on étudie l'espace propre $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$.

Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \ldots, v_n$ ses coefficients. On note $|\mathrm{V}|$ le vecteur colonne de coefficients $|v_1|, \ldots, |v_n|$.

**a.** Soit V un vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{A}$ relatif à la valeur propre 1. On note $v_1, \ldots, v_n$ ses coefficients. Pour tout indice $i$ entre 1 et $n$, prouver l'inégalité

$$|v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|.$$

**b.** À l'aide de la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$, prouver que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

**c.** Prouver l'égalité ${}^t\mathrm{A} \times |\mathrm{V}| = |\mathrm{V}|$.

**d.** Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, prouver que $|v_i|$ est strictement positif.

On a donc prouvé que tout vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$ a ses coefficients tous non nuls.

**e.** Soient X et Y deux éléments de l'espace propre $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$.

Montrer que le vecteur $y_1\mathrm{X} - x_1\mathrm{Y}$ est nul.

**f.** Prouver que $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ est de dimension 1.

**g.** Prouver que $\mathrm{E}_1({}^t\mathrm{A})$ admet un vecteur directeur W dont les coordonnées $w_1, \ldots, w_n$ sont strictement positives et vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

**5.** Dans cette question, on interprète la matrice A et le vecteur colonne W en termes probabilistes.

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Un personnage voyage entre $n$ villes, numérotées de 1 à $n$. Chaque jour, il passe d'une ville à une autre ou il reste sur place. Ses déplacements sont fixés aléatoirement. Plus précisément, si au jour $k$, le personnage est dans la ville $i$, alors la probabilité qu'il soit dans la ville $j$ au jour $(k+1)$ vaut $a_{i,j}$.

Pour modéliser cette expérience, on fixe un entier N et on étudie les positions du personnage entre le jour 0 et le jour N. Pour tout $k$ dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, on note $\mathrm{X}_k$ le numéro de la ville où se trouve le personnage au jour $k$. On suppose que $\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout $k$ dans $[\![0, \mathrm{N}]\!]$, on code la loi de la variable aléatoire $\mathrm{X}_k$ par le vecteur ligne

$$\mathrm{L}_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 1) & \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = 2) & \cdots & \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = n) \end{pmatrix}.$$

**a.** Interpréter les $a_{i,j}$ comme des probabilités conditionnelles. Expliquer pourquoi les hypothèses sur la matrice A sont pertinentes pour la modélisation proposée.

**b.** Pour tout $k$ dans $[\![0, \mathrm{N}-1]\!]$, prouver la relation $\mathrm{L}_{k+1} = \mathrm{L}_k \times \mathrm{A}$.

**c.** Prouver qu'il existe une manière (et une seule) de choisir la loi de $\mathrm{X}_0$ pour laquelle $\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ ont toutes la même loi.

---

**Exercice 1. (***)** Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de prouver que les trois énoncés qui suivent sont équivalents entre eux :

(1) pour tout $x$ dans $\mathbb{C}$, la matrice $\mathrm{A} + x\mathrm{B}$ est diagonalisable ;
(2) les matrices A et B commutent ;
(3) les matrices A et B admettent une base commune de diagonalisation.

**a.** Justifier l'implication (3) $\Rightarrow$ (1).

**b.** Soit M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que si M possède une valeur propre de multiplicité 2, alors M est un multiple de $\mathrm{I}_2$.

**c.** Dans cette question, on suppose que $\chi_\mathrm{A}$ possède deux racines distinctes et qu'elle commute avec B. Montrer que toute base de diagonalisation pour A en est une pour B aussi.

**d.** Justifier l'implication (2) $\Rightarrow$ (3).

**e.** Dans cette question, on considère deux matrices C et D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que D est diagonale et que pour tout $x$ dans $\mathbb{C}$, la matrice $\mathrm{C} + x\mathrm{D}$ est diagonalisable. On suppose enfin que les coefficients diagonaux de D sont distincts.

Calculer le discriminant du polynôme caractéristique de $\mathrm{C} + x\mathrm{D}$ et en déduire qu'il existe $x$ dans $\mathbb{C}$ pour lequel la matrice $\mathrm{C} + x\mathrm{D}$ admet une valeur propre double.

**f.** Justifier l'implication (1) $\Rightarrow$ (2).

---