Exercice 1. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (cette intégrale est notée I dans la suite).

b. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, trouver une relation entre I_n et l'intégrale de Wallis W_{2n+1}.

c. On donne l'équivalent $\mathrm{W}_p \sim \sqrt{\pi/(2p)}$. En déduire la valeur de I.

d. Prouver l'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, admise dans un exercice du chapitre 3.

Solution de l'exercice 1. a. Corrigé en vidéo.

---

b. La fonction $u \mapsto \sqrt{n}\cos(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
Le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ donne $\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\,\mathrm{d}u$ puis

$$\mathrm{I}_n = \int_{\pi/2}^{0} \left(1-\cos^2(u)\right)^n (-\sqrt{n}\sin(u))\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\times \mathrm{W}_{2n+1}.$$

---

c. Le produit $\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1}$ est équivalent à $\sqrt{n}\times\sqrt{\pi/(4n+2)}$, lui-même équivalent à $\sqrt{\pi}/2$, si bien que ce produit tend vers $\sqrt{\pi}/2$.

Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\mathrm{I} = \sqrt{\pi}/2$.

---

d. La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$, définie de $]0, +\infty[$ ver $]0, +\infty[$, est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$.
On peut donc effectuer le changement de variable $t = \sqrt{u}$ dans l'intégrale I. On obtient $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/(2\sqrt{u})$ puis

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

puis $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^n$.

Montrer l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution de l'exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale proposée se calcule directement

$$\int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n.$$

Le changement d'indice $\ell = n - k$ donne finalement

$$\int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\ell}{n}\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors une fonction f_n de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n & \text{si } x < n \\ 0 & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux (c'est une fonction en escalier).

$\boxed{1}$ Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour tout entier $n > x$, on a l'inégalité $1 - \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} > 0$ et on peut écrire

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)\right).$$

Cette expression étant valable à partir d'un certain rang, on peut effectuer un développement limité quand n tend vers $+\infty$

$$f_n(x) = \exp\left(n\left(-\frac{\lfloor x \rfloor}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-\lfloor x \rfloor + \mathrm{o}(1)).$$

La continuité de l'exponentielle donne que $f_n(x)$ tend vers $\exp(-\lfloor x \rfloor)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto \exp(-\lfloor x \rfloor)$. Cette fonction est continue par morceaux.

$\boxed{2}$ On va utiliser sans démonstration l'inégalité classique

$$\forall u > -1, \quad \ln(1 + u) \leqslant u.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

Si $n > x$, on utilise de nouveau la forme exponentielle et on obtient

$$|f_n(x)| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)\right) = \exp(-\lfloor x \rfloor).$$

Si $n \leqslant x$, l'égalité $f_n(x) = 0$ donne également la majoration $|f_n(x)| \leqslant \exp(-\lfloor x \rfloor)$.

On a donc obtenu la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leqslant f(x).$$

Rappelons l'inégalité $\lfloor x \rfloor \geqslant x - 1$, qui donne $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}$.

On sait que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f l'est aussi.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \exp(-\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à calculer cette intégrale. Pour cela, prenons un entier N strictement positif.

$$\int_0^{\mathrm{N}} \exp(-\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \int_k^{k+1} \exp(-k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \exp(-k).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}}.$$

Exercice 3. (***) Pour tout x réel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on calculera $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right)\mathrm{d}t$ et on appliquera le théorème de convergence dominée.

Guide pour l'exercice 3. D'abord, fixer un x réel une fois pour toutes.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2} t^k$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_k = \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\ \mathrm{d}t$.

Trouver une relation entre I_{k+2} et I_k. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1}.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}x)^k}{k!} f_k(t).$$

Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 3. À venir.

Exercice 4. (*) Pour tout (n,p) de $\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (\ln(t))^p\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales existent.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout p dans $\mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathrm{I}(n,p)$ et $\mathrm{I}(n,p-1)$.

c. En déduire une expression explicite de $\mathrm{I}(n,p)$.

d. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\ \mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

e. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Solution de l'exercice 4.

a. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $f_{n,p} : t \mapsto t^n(\ln(t))^p$ est continue sur $]0,1]$.

On sait que $t^{n+\frac{1}{2}}(\ln(t))^p$ tend vers 0 quand t tend vers 0 donc $f_{n,p}(t) = \mathrm{o}(1/\sqrt{t})$ quand t tend vers 0.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc la fonction $f_{n,p}$ l'est aussi. En particulier, l'intégrale $\mathrm{I}(n,p)$ existe.

Remarque. Même si l'énoncé demande seulement de justifier l'existence de ces intégrales, il faut anticiper le fait qu'on aura besoin ultérieurement d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme et formuler notre résolution en termes d'intégrabilité.

---

b. Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Soit $a \in]0,1]$. On réalise une intégration par parties dans $\displaystyle\int_a^1 t^n(\ln(t))^p\ \mathrm{d}t$.

On dérive $t \mapsto (\ln(t))^p$ en $t \mapsto p(\ln(t))^{p-1}/t$.
On primitive $t \mapsto t^n$ en $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$.

$$\int_a^1 t^n(\ln(t))^p\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln(t))^p\right]_{t=a}^{t=1} - \frac{p}{n+1}\int_a^1 t^{n+1}\frac{(\ln(t))^{p-1}}{t}\ \mathrm{d}t = -\frac{a^{n+1}(\ln(a))^p}{n+1} - \frac{p}{n+1}\int_a^1 t^n(\ln(t))^{p-1}\ \mathrm{d}t.$$

L'exposant $n+1$ est strictement positif donc $a^{n+1}(\ln(a))^p$ tend vers 0 quand a tend vers 0. Ce passage à la limite donne la relation

$$\mathrm{I}(n,p) = -\frac{p}{n+1}\mathrm{I}(n,p-1).$$

---

c. On itère cette relation de récurrence

$$\mathrm{I}(n,p) = \frac{-p}{n+1} \times \frac{-(p-1)}{n+1}\mathrm{I}(n,p-2) = \cdots = \frac{-p}{n+1} \times \frac{-(p-1)}{n+1} \times \frac{-1}{n+1}\mathrm{I}(n,0).$$

On trouve par ailleurs

$$\mathrm{I}(n,0) = \int_0^1 t^n \;\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1},$$

ce qui donne finalement

$$\mathrm{I}(n,p) = \frac{(-1)^p\, p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

On peut remarquer que cette formule est encore valable si $p = 0$.

---

d. On commence par observer l'identité

$$\forall t \in \,]0,1[, \quad \frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,1}(t).$$

On va donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_{n,1}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n,1}$ est continue et intégrable sur $]0,1[$.

$\boxed{2}$ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_{n,1}$ converge simplement sur $]0,1[$.

$\boxed{3}$ Sa somme est $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$, qui est continue sur $]0,1[$.

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 |f_{n,1}(t)| \;\mathrm{d}t = -\mathrm{I}(n,1) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_{n,1}(t)| \;\mathrm{d}t$ est donc convergente.

Par application du théorème d'intégration terme à terme, la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 g(t) \;\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_{n,1}(t) \;\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \;\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}(n,1) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \underbrace{=}_{k=n+1} -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

---

e. On commence par remarquer l'identité

$$\forall x \in \,]0,1], \quad x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(\ln(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_{n,n}(x)}{n!}.$$

On va donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f_{n,n}}{n!}$ sur l'intervalle $]0,1]$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n,n}/n!$ est continue et intégrable sur $]0,1]$.

$\boxed{2}$ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f_{n,n}}{n!}$ converge simplement sur $]0,1]$.

$\boxed{3}$ Sa somme est $h : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(x)}$, qui est continue sur $]0,1]$.

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\int_0^1 \left| \frac{f_{n,n}(x)}{n!} \right| \, \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{\mathrm{I}(n,n)}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, ceci est majoré par $1/(n+1)^2$, si bien que c'est le terme général d'une série convergente.

Par application du théorème d'intégration terme à terme, la fonction $h : x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{f_{n,n}(x)}{n!} \, \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}(n,n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \underbrace{=}_{k=n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}.$$

Exercice 5. (**) Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} \, \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Solution de l'exercice 5. Soit $x > 0$.

$$\frac{x}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{2x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{2x\mathrm{e}^{-x}}{1-(-\mathrm{e}^{-2x})}.$$

Le nombre e^{-2x} est dans $]0,1[$, ce qui permet de reconnaître une somme géométrique.

$$\frac{x}{\mathrm{ch}(x)} = 2x\mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\mathrm{e}^{-2x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2x\mathrm{e}^{-(2n+1)x}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto (-1)^n 2x\mathrm{e}^{-(2n+1)x}$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
Les croissances comparées donnent que $x\mathrm{e}^{-(2n+\frac{1}{2})x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, si bien que $f_n(x)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{-x/2}$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction f_n l'est aussi. En particulier, elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Sa somme est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{ch}(x)}$, qui est continue sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(2n+1)x} \, \mathrm{d}x.$$

Soit $\mathrm{A} > 0$. Une intégration par parties que je ne détaille pas donne

$$\int_0^{\mathrm{A}} x\mathrm{e}^{-(2n+1)x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{A}\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)\mathrm{A}}}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-(2n+1)x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{A}\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)\mathrm{A}}}{2n+1} + \frac{-\mathrm{e}^{-(2n+1)\mathrm{A}} - 1}{(2n+1)^2}.$$

Quand A tend vers $+\infty$, ceci tend vers $1/(2n+1)^2$ donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \ \mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Ceci est équivalent à $1/(2n^2)$ quand n tend vers $+\infty$ donc c'est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme donne finalement que la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale se calcule en intégrant terme à terme

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} \ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 6. (**) Soit $t \in \mathbb{R}$. On veut prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1} \ \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+n^2}$.

a. Première méthode. Passer par les sommes partielles avec le théorème de convergence dominée.

b. Deuxième méthode. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Sous l'hypothèse $t > 0$, on écrira

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)| \ \mathrm{e}^{-ku} \ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)| \ \mathrm{e}^{-ku} \ \mathrm{d}u + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)| \ \mathrm{e}^{-ku} \ \mathrm{d}u.$$

et on majorera $|\sin(tu)|$ par 1 ou $|tu|$ selon ce qui est le plus pertinent.

Solution de l'exercice 6. Soit $u > 0$. La fonction $f_t : u \mapsto \dfrac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude en 0. Quand u tend vers 0, le dénominateur est équivalent à u, si bien que $f_t(u)$ tend vers t. La fonction f_t est donc intégrable sur $]0,1]$.

Étude en $+\infty$. Pour tout $u \geqslant 1$, on a la majoration $|f_t(u)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^u - 1}$.

L'équivalent $\dfrac{1}{\mathrm{e}^u-1} \sim \mathrm{e}^{-u}$ donne l'intégrabilité de $u \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^u-1}$ sur $[1,+\infty[$ puis celle de f_t par la domination ci-dessus.

la fonction f_t est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

Mise sous forme d'une somme de série. On fait apparaître une série géométrique de raison e^{-u} (cette raison est dans $]0,1[$).

$$\frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u-1} = \frac{\sin(tu)\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(tu)\mathrm{e}^{-(n+1)u} \underbrace{=}_{k=n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(tu)\mathrm{e}^{-ku}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_k : u \mapsto \sin(tu)\mathrm{e}^{-ku}$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_k est continue sur $[0,+\infty[$ et on a la domination

$$\forall u \geqslant 0, \quad |f_k(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-ku}.$$

La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-ku}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction f_k l'est aussi. Soit $\mathrm{A} > 0$.

$$\int_0^{\mathrm{A}} f_k(u) \ \mathrm{d}u = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-ku+\mathrm{i}tu} \ \mathrm{d}u\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{-k\mathrm{A}+\mathrm{i}t\mathrm{A}}-1}{-k+\mathrm{i}t}\right).$$

Le module de $\mathrm{e}^{-k\mathrm{A}+\mathrm{i}t\mathrm{A}}$ vaut $\mathrm{e}^{-k\mathrm{A}}$ donc ceci tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$. Ce passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} f_k(u) \ \mathrm{d}u = \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{-k+\mathrm{i}t}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{k+\mathrm{i}t}{k^2+t^2}\right) = \frac{t}{k^2+t^2}.$$

a. Première méthode. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S_N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f_k$. Par somme, la fonction $\mathrm{S_N}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. Son intégrale s'exprime de deux manières. D'une part,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S_N}(u)\ \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \int_0^{+\infty} f_k(u)\ \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{t}{k^2+t^2}.$$

D'autre part, pour tout $u > 0$, le nombre $\mathrm{S_N}(u)$ est une somme géométrique finie de raison $\mathrm{e}^{-u} \neq 1$

$$\mathrm{S_N}(u) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \sin(tu)\mathrm{e}^{-ku} = \sin(tu)\mathrm{e}^{-u}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{N}u}}{1-\mathrm{e}^{-u}}.$$

On en déduit alors l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S_N}(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{1-\mathrm{e}^u}\ \mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{1-\mathrm{e}^u}\mathrm{e}^{-\mathrm{N}u}\ \mathrm{d}u.$$

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_\mathrm{N} : u \mapsto f_t(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{N}u}$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue.

$\boxed{1}$ La suite de fonctions $(g_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle, qui est intégrable.

$\boxed{2}$ On a la domination

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u > 0, \quad |g_\mathrm{N}(u)| \leqslant |f_t(u)|\,.$$

La fonction f_t est indépendante du paramètre N, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} g_\mathrm{N}(u)\ \mathrm{d}u$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Ce passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1}\ \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t}{k^2+t^2}.$$

b. Deuxième méthode. On fait l'hypothèse $t > 0$ (le cas $t < 0$ s'en déduit en remplaçant t par $-t$ et le cas $t = 0$ est immédiat). On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (démontré plus haut).

2 La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} f_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

3 Sa somme s'écrit $u \mapsto \dfrac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1}$. Elle est continue.

4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La relation de Chasles donne

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u.$$

Une première majoration donne

$$\int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_{\pi/t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-k\pi/t}}{k} \leqslant \mathrm{e}^{-k\pi/t}.$$

L'encadrement $0 < \mathrm{e}^{-\pi/t} < 1$ prouve que la série géométrique de terme général $\mathrm{e}^{-k\pi/t}$ converge.
Par domination, la série de terme général $\int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u$ converge.

Une deuxième majoration donne

$$\int_0^{\pi/t} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi/t} |tu|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u = t\int_0^{\pi/t} u\mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^{\pi/t} u\mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{k}u\mathrm{e}^{-ku}\right]_{u=0}^{u=\pi/t} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi/t} \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u = \frac{-\mathrm{e}^{-k\pi/t}\pi}{kt} - \left(\frac{\mathrm{e}^{-k\pi/t}-1}{k^2}\right) \leqslant \frac{1}{k^2},$$

donc

$$\int_0^{\pi/t} |\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u \leqslant \frac{t}{k^2}.$$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^2}$ converge. Par domination, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\int_0^{\pi/t}|\sin(tu)|\ \mathrm{e}^{-ku}\ \mathrm{d}u$ converge.

Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_k(u)|\ \mathrm{d}u$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne donc l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u-1}\ \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_k(u)\ \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t}{k^2+t^2}.$$

Exercice 7. (*) Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ et $g(0)=f'(0)$.

Vérifier l'égalité $\int_0^1 f'(xt)\ \mathrm{d}t = g(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 7. À venir.

Exercice 8. (*) Pour tout x réel, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Dériver la fonction f. En déduire une relation entre f et g.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9. (**) On pose $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ puis pour tout $x\in[0,+\infty[$.

d. Obtenir finalement une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout x réel.

Exercice 10. (*) Pour tout $(a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, montrer l'existence de l'intégrale.

$$\mathrm{I}(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale. Pour cela, on pourra fixer a et dériver par rapport à b.

Exercice 11. (**) On pose $\mathrm{J}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par J puis trouver une expression simple de $\mathrm{J}(x)$.

Exercice 12. (***) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t.$$

a. Pour tout x dans $[0, +\infty[$, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t.$$

La valeur de cette intégrale est notée $\mathrm{F}(x)$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

c. Prouver que la convergence est uniforme. On pourra remarquer qu'à x fixé, la série $\sum u_n(x)$ est alternée.

d. Prouver que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

e. Prouver que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

f. En déduire une expression de la fonction F sur $[0, +\infty[$. Que vaut $\mathrm{F}(0)$?

Solution de l'exercice 12. a. Pour tout x dans $[0, +\infty[$ et tout $t > 0$, on pose $f(x, t) = \dfrac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}$.

Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ admet la limite 1 en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$.

Étude en $+\infty$. Soit $x > 0$. Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la domination $|f(x, t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto f(x, t)$ l'est aussi.

Le cas $x = 0$ est plus délicat. On a vu dans l'exercice 13 du chapitre 4 que la fonction $t \mapsto f(0, t)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On va donc se contenter de prouver l'existence de $\mathrm{F}(0)$ en exploitant la méthode utilisée dans l'exercice 5 du chapitre 4.

Fixons $a \geqslant 1$. Une intégration par parties que je ne détaille pas donne

$$\int_1^a \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{-\cos(a)}{a} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

La domination $\left| \dfrac{\cos(a)}{a} \right| \leqslant \dfrac{1}{a}$ montre que $\cos(a)/a$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$.

La domination $\left| \dfrac{\cos(t)}{t^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$ converge absolument.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^a \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ tend vers $\dfrac{\cos(1)}{2} - \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$ quand a tend vers $+\infty$.

L'existence de $\mathrm{F}(0)$ est alors prouvée.

---

b. Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la relation de Chasles donne

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n(x) = \int_0^{(\mathrm{N}+1)\pi} f(x, t) \, \mathrm{d}t.$$

Ceci tend vers $\mathrm{F}(x)$ quand l'entier N tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et sa somme est la fonction F.

---

c. Soit $x \in [0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable $u = t - n\pi$.

$$u_n(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi} \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)} \; \mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)} \; \mathrm{d}u.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u + n\pi} \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}$ est positive sur $]0, \pi]$ donc $u_n(x)$ a le signe de $(-1)^n$. Posons $v_n(x) = |u_n(x)|$.

Pour tout $u \in]0, \pi]$, on observe les inégalités

$$0 \leqslant \sin(u), \quad 0 \leqslant \frac{1}{u + (n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{u + n\pi}, \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x(u+(n+1)\pi)} \leqslant \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}.$$

On en déduit l'inégalité $v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x)$. La suite $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Enfin, la convergence de la série $\sum u_n(x)$ prouve que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. La suite $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge donc vers 0 également. Cette suite vérifie donc les hypothèses du théorème des séries alternées.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{R_N}(x) = \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} u_n(x)$, c'est-à-dire $\mathrm{R_N}(x) = \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n v_n(x)$.
Le théorème des séries alternées donne

$$|\mathrm{R_N}(x)| \leqslant v_\mathrm{N}(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + \mathrm{N}\pi} \mathrm{e}^{-x(u+\mathrm{N}\pi)} \; \mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{\mathrm{N}\pi} \; \mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Ce majorant est indépendant de x, ce qui donne que la fonction $\mathrm{R_N}$ est bornée sur $[0, +\infty[$, avec

$$||\mathrm{R_N}||_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

On en déduit que $||\mathrm{R_N}||_{\infty,[0,+\infty[}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

---

d. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi]$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a la domination

$$|f(x, t)| \leqslant \frac{|\sin(t)|}{t} = |f(0, t)|.$$

La fonction $t \mapsto |f(0, t)|$ est indépendante de x, continue et intégrable sur $]n\pi, (n+1)\pi]$.

Le théorème de continuité sous l'intégrale permet d'en déduire que la fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$.

La convergence uniforme de la question précédente permet alors de conclure que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour la deuxième partie de la question, j'utilise, sans en rappeler la démonstration, la majoration $|\sin(t)| \leqslant t$, qui permet d'obtenir

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} \mathrm{e}^{-xt} \; \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \; \mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Cette majoration prouve que la fonction F admet une limite nulle en 0.

---

e. $\boxed{1}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}.$$

$\boxed{3}$ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit $a > 0$. On obtient la domination

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \forall t > 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est indépendante du paramètre x, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. C'est vrai pour tout $a > 0$ donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t.$$

Fixons $x > 0$ et prenons $b > 0$. On trouve alors

$$\int_0^b \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t} \, \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})b} - 1}{-x+\mathrm{i}}\right).$$

Le module de $\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})b}$ vaut e^{-xb}. Il tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$. On obtient donc

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-x+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-x-\mathrm{i}}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{x^2+1}.$$

f. Il existe donc une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{C} - \mathrm{Arctan}(x).$$

Le fait que F tende vers 0 en $+\infty$ donne $\mathrm{C} = \pi/2$. La continuité de F en 0 donne finalement $\mathrm{F}(0) = \pi/2$, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13. (*) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $f(0) \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$. On note sa valeur I_n.

Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $g_n : t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-nt}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0. Quand t tend vers 0, on a l'équivalent

$$|g_n(t)| \sim |f(0)| \times \frac{1}{\sqrt{t}},$$

qui prouve que g_n est intégrable sur $]0, 1]$.

Étude en $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 1$, on a la majoration

$$|g_n(t)| \leqslant ||f||_\infty \times \mathrm{e}^{-nt},$$

qui prouve que g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Tout ceci justifie l'existence de I_n.

Le changement de variable $u = nt$ donne

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

Ceci nous incite à définir $f_n : u \mapsto f\left(\dfrac{u}{n}\right) \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{1}$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g : u \mapsto f(0)\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$. Cette fonction est continue.

$\boxed{2}$ On observe la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in]0, +\infty[, \quad |f_n(u)| \leqslant ||f||_\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par le même raisonnement qu'au début de cet exercice.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(u)\ \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f(0)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u = f(0) \times \Gamma(1/2).$$

On en déduit que I_n est équivalent à $f(0)\Gamma(1/2)/\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14. (***) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, d], \mathbb{C})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{g}(t) = \int_0^d t\mathrm{e}^{-tx} g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\tilde{g}(t)$ tend vers $g(0)$ quand t tend vers $+\infty$.

On utilisera la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 15. (**) On considère une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ absolument convergente et on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 16. (**) On pose $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et calculer sa somme.

Préciser ensuite le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 17. (**) **Intégrale de Fresnel complexe**

1. On considère un élément z de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

1.a. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$.

1.b. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Montrer que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2.b. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2.c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et préciser sa valeur.

Solution de l'exercice 17.

1.a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\frac{1}{t-z} = \frac{t-\overline{z}}{|t-z|^2} = \frac{(t-a)+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \frac{\mathrm{i}}{b} \times \frac{1}{\left(\frac{t-a}{b}\right)^2+1}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right).$$

1.b. Soit $t \in \mathbb{R}$. On trouve

$$\frac{1}{t^2-z^2} = \frac{(t+z)-(t-z)}{(t-z)(t+z)} \times \frac{1}{2z} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z}\right).$$

En changeant (a,b) en $(-a,-b)$ dans la formule de la question précédente, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t+z}$ est

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln((t+a)^2+b^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{-b}\right) = \frac{1}{2}\ln((t+a)^2+b^2) - \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{b}\right).$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-z^2}$ est donc la fonction F_z suivante

$$\mathrm{F}_z : t \mapsto \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(t-a)^2+b^2}{(t+a)^2+b^2}\right) + \mathrm{i}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{t+a}{b}\right)\right)\right).$$

La partie logarithmique ci-dessus tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, ainsi que quand t tend vers $-\infty$.

Chacune des arctangentes ci-dessus tend vers $\text{signe}(b) \times \frac{\pi}{2}$ quant t tend vers $+\infty$ et vers l'opposé de cela quand t tend vers $-\infty$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ est convergente et que sa valeur est $\dfrac{1}{2z} \times 4 \times \mathrm{i} \times \text{signe}(b) \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\mathrm{i}\pi\,\text{signe}(b)}{z}$.

2.a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, posons $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i} + t^2}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on observe les relations

$$|g(x,t)| = \frac{\mathrm{e}^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, indépendante du paramètre x.

Quand t tend vers $+\infty$, on voit que $\psi(t)$ est équivalent à $1/t^2$.
On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction ψ l'est aussi.

Le point $\boxed{3}$ donne que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En particulier, le nombre $f(x)$ est bien défini.

Les trois points permettent d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale, qui donne que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Le calcul donne (par parité de l'intégrande)

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \mathrm{i}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \mathrm{i}}.$$

On choisit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, de manière à avoir $z^2 = -\mathrm{i}$. Ce nombre s'écrit aussi sous la forme

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

La partie imaginaire de z est strictement positive. La formule de la partie 1 donne donc

$$f(0) = \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{i}\pi}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\pi(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}.$$

Prenons maintenant $x > 0$. Une majoration directe donne

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |g(x,t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = xt$ (détaillé à la question suivante) donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u \qquad \text{donc} \qquad |f(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

Cette majoration prouve que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2.c. $\boxed{1}$ Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, comme on l'a vu en 2.a.

$\boxed{2}$ Soit $t \in [0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}.$$

$\boxed{3}$ Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{4}$ Soit un segment $[c,d]$ contenu dans $]0,+\infty[$.

$$\forall (x,t) \in [c,d] \times [0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = 2x\mathrm{e}^{-x^2t^2} \leqslant \underbrace{2d\mathrm{e}^{-c^2t^2}}_{\text{noté } \varphi(t)}.$$

La fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$. Les croissances comparées donnent que $\varphi(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$. On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la fonction φ l'est aussi. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$. C'est vrai pour tout segment $[c,d]$ contenu dans $]0,+\infty[$ donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

On a de plus

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = -2x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto xt$, définie de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = xt$, qui donne $\mathrm{d}u = x\ \mathrm{d}t$, puis

$$\varphi'(x) = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}.$$

2.d. Prenons $x > 0$ et $s > 0$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$f(x) = f(s) + \int_s^x f'(u)\ \mathrm{d}u = f(s) - \sqrt{\pi}\int_s^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u.$$

La continuité de f en 0 donne alors

$$f(x) = \frac{\pi(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\pi}\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Le fait que la fonction f ait une limite nulle en $+\infty$ donne que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u$ tend vers $\dfrac{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}$ quand x tend vers $+\infty$.

On a donc prouvé que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u^2}\ \mathrm{d}u$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}}$.
