

Problème I

On considère la fonction F définie par son développement en série entière

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction F en $+\infty$.

Partie 1

Question 1. Montrer que la fonction F est définie sur \mathbb{R} .

Question 2. Pour tout n dans \mathbb{N} , prouver la majoration $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.

Question 3. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, en déduire la majoration $F(x) \leq \text{ch}(2x)$.

Question 4. Pour tout n dans \mathbb{N} , prouver la minoration $\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}/(2n+1)$.

Question 5. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, en déduire la minoration $F(x) \geq \text{sh}(2x)/(2x)$.

Question 6. Trouver un équivalent (aussi simple que possible) de $\ln(F(x))$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie 2

Dans cette partie, on calcule la *transformée de Laplace* de la fonction F , c'est-à-dire la fonction $L(F)$ définie par

$$L(F)(p) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt} dt.$$

Question 7. Montrer que la fonction $L(F)$ est définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Question 8. Pour tout u dans $] -1, 1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{u^{2n}}{2^{2n}}.$$

Question 9. Soit p dans $]0, +\infty[$. Pour tout k dans \mathbb{N} , montrer que l'intégrale

$$J_k(p) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-pt} dt$$

existe et vaut $k!/p^{k+1}$.

Question 10. À l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, obtenir une expression de $L(F)(p)$ pour tout $p > 2$.

Question 11. On définit maintenant sur $]0, +\infty[$ la fonction $\Phi : t \mapsto e^{2t}/\sqrt{t}$.

Montrer que la fonction $L(\Phi)$ est définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ et trouver une expression de cette fonction. On admet la valeur

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}.$$

Question 12. Trouver la limite de $L(F)(p)/L(\Phi)(p)$ quand p tend vers 2.

Un théorème que nous ne prouverons pas ici montre que si G est une fonction équivalente à F en $+\infty$ (et vérifiant d'autres propriétés anodines), alors $L(F)$ est équivalente à $L(G)$ en 2. Cela suggère donc que F pourrait être équivalente à $\ell \times \Phi$ en $+\infty$, où ℓ est la limite de la dernière question.

Partie 3

Pour tout x réel, on pose $h_1(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(x \cos(t)) dt$.

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$.

Question 13. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , prouver la relation $I_n = I_{n-1} \times (2n - 1)/2n$.

Question 14. En déduire une expression de I_n avec des factorielles.

Question 15. À l'aide d'une intégration terme à terme, obtenir l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt.$$

Question 16. Pour tout x dans \mathbb{R} , prouver l'égalité

$$h_1(x) = \int_0^1 \frac{e^{xu}}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Partie 4

Pour tout x réel, on pose

$$h_2(x) = \int_0^1 \frac{e^{xu}}{\sqrt{1-u}} du, \quad \text{et} \quad h_3(x) = \int_0^1 e^{xu} \sqrt{1-u} du.$$

Question 17. Justifier l'existence de $h_2(x)$.

Question 18. Effectuer le changement de variable $z = \sqrt{1-u}$ dans l'expression de $h_2(x)$ puis montrer que $h_2(x)$ admet un équivalent (quand x tend vers $+\infty$) de la forme $C \times \Phi(x/2)$ pour une certaine constante C .

Question 19. Soit $x > 0$. Montrer l'égalité $h_3(x) = -1/x + h_2(x)/(2x)$. En déduire que $h_3(x)$ est négligeable devant $h_2(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Question 20. Montrer l'existence d'une constante D telle que

$$\forall u \in [0, 1[, \quad \left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leq D\sqrt{1-u}.$$

Question 21. Obtenir finalement un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1. (*) On définit sur $[-1, 1]$ la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}^2(x)$.

a. Pour tout x dans $] -1, 1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

b. Prouver que la fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$ et exprimer son développement en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^{2n}.$$

Le coefficient d_n sera exprimé sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

c. Pour tout x dans $] -1, 1[$, prouver l'égalité $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

d. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients d_n puis trouver une expression simplifiée de d_n .