PC* — mathématiques **jeudi 20 janvier 2021**
Devoir surveillé n° 5 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème I — E3A PC 2020

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

   Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

   Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner, pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (d) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, on a l'égalité $f'(x) = f(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors pour tout $x \in [0,1[$ l'égalité $\ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

6. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Problème II — CC-INP PSI 2021

Dans tout le problème, la lettre α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.
Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.
L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.
Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0,1[$.

Partie I — Quelques propriétés des fonctions f_α

Question 7. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Question 8. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas* $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0,1]$ *et* $\alpha \in]1,+\infty[$.

Question 9. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Question 10. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Question 11. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Question 12. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

Partie II — Un logarithme complexe

Question 13. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note $\mathrm{S}(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Question 14. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, déterminer la valeur de $\exp(\mathrm{S}(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < \mathrm{R}$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, on a la relation $g(t) = \mathrm{S}(tz_0)$.

Question 15. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Question 16. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$,une expression de $g'(t)$.

Question 17. On pose $h = \exp \circ g$. Pour tout $t \in [0,1]$, prouver la relation

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + t z_0} h(t).$$

Question 18. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que

$$\exp(\mathrm{S}(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III — Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

Question 19. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $\mathrm{I}(x)$ est convergente.

Question 20. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $\mathrm{I}(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

Question 21. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 22. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

Question 23. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.
