



Le sujet est composé de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite  $(\alpha_n)_n$  d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite  $(\alpha_{2n+1})_n$  formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque  $n$  tend vers l'infini, de  $\alpha_{2n+1}$  en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

## I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $I$  par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note  $f^{(n)}$  la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  et, par convention,  $f^{(0)} = f$ .

### I.A – Dérivées successives

**Q 1.** Exprimer les dérivées  $f'$ ,  $f''$  et  $f^{(3)}$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Q 2.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et, pour tout entier naturel  $n$ , on exprimera  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  et  $P'_n$ .

**Q 3.** Justifier que, pour tout entier  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_n$  est unitaire, de degré  $n$  et que ses coefficients sont des entiers naturels.

**Q 4.** Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$ .

**Q 5.** Montrer  $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

### I.B – Développement en série entière

On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$  et  $g$  sa somme.

**Q 6.** À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leq f(x).$$

Q 7. En déduire la minoration  $R \geq \pi/2$ .

Q 8. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

Q 9. Montrer

$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions  $\arctan f$  et  $\arctan g$ .

Q 10. En déduire que  $R = \pi/2$ .

### I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Justifier que toute fonction  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit de façon unique sous la forme  $h = p + i$  avec  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction paire et  $i : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire.

Q 12. En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note  $t$  la fonction définie sur  $I$  par  $t(x) = \tan(x)$ .

Q 13. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $t^{(n)}(0)$  en fonction des réels  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

Q 14. Rappeler, sans justification, l'expression de  $t'$  en fonction de  $t$ .

Q 15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

## II Équivalent de $\alpha_{2n+1}$

### II.A – La fonction zêta

Pour tout  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

Q 16. Montrer que  $\zeta$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

Q 17. Encadrer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  par deux intégrales et en déduire  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$ .

Q 18. Déterminer  $C(s)$  tel que

$$\forall s \in ]1, +\infty[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s) \zeta(s).$$

### II.B – Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on pose  $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n dt$ .

Q 19. Montrer

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Q 21. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, 1[, \quad \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

### II.C – Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose  $J = ]0, 1/2[$  et, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $J$ ,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

Q 22. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in ]1, +\infty[, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leq \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

Q 23. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $S_n$  est définie sur  $J$ .

Q 24. Montrer que la suite  $(S_n)$  converge simplement sur  $J$  vers la fonction nulle.

Q 25. En dérivant  $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$ , montrer

$$\forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^n \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

Q 26. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

Q 27. Montrer l'inégalité  $t \cos(t) \leq \sin(t)$ , pour tout  $t$  de  $[0, \pi/2]$ .

Q 28. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq -I'_n(x) \leq \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour  $x \in [0, 1]$ , la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$ .

Q 29. En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \quad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

### II.D – Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$

Q 30. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

Q 31. En déduire un équivalent de  $\alpha_{2n+1}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### III Permutations alternantes

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une liste de  $n$  nombres réels. On dit que la liste  $(x_1, \dots, x_n)$  est alternante montante si  $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . On dit qu'elle est alternante descendante si  $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$  pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

Autrement dit, la liste  $(x_1, \dots, x_n)$  est alternante montante si elle vérifie les inégalités  $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \dots$ . Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple,  $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$  est alternante montante car  $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$  et  $(7, 4, 5, 2, 12)$  est alternante descendante car  $7 > 4 < 5 > 2 < 12$ .

On dit qu'une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec  $n = 7$  et en représentant toute permutation  $\sigma$  par la liste des images  $(\sigma(1), \dots, \sigma(7))$ , on constate que  $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$  représente une permutation alternante montante et  $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$  une permutation alternante descendante.

#### III.A – Dénombrement des permutations alternantes

**Q 32.** Déterminer les permutations alternantes montantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  pour  $n = 2, n = 3, n = 4$ .

**Q 33.** Montrer, pour tout  $n \geq 2$ , que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si  $n \geq 2$ , on note  $\beta_n$  le nombre de permutations alternantes montantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et on convient que  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ .

**Q 34.** Soient  $k$  et  $n$  deux entiers tels que  $2 \leq k \leq n$  et  $A$  une partie à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On considère les listes  $(x_1, \dots, x_k)$  constituées de  $k$  éléments deux à deux distincts de  $A$ . Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à  $\beta_k$ .

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

**Q 35.** Montrer, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dénombrer les permutations  $\sigma$  alternantes (montantes ou descendantes) de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  telles que  $\sigma(k+1) = n+1$ .

**Q 36.** En déduire que  $\beta_n = \alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### III.B – Permutations aléatoires

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on munit l'ensemble  $\Omega_n$  des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de la probabilité uniforme. On note  $p_n$  la probabilité qu'une permutation dans  $\Omega_n$  soit alternante montante. On convient de plus que  $p_0 = p_1 = 1$ .

**Q 37.** Montrer que la suite  $(p_n)$  tend vers 0. Donner un équivalent de  $p_{2n+1}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire  $M_n$  sur  $\Omega_n$  en associant à toute permutation  $\sigma \in \Omega_n$  l'entier  $M_n(\sigma)$  tel que :

- $M_n(\sigma) = 2$  si  $\sigma(1) > \sigma(2)$  ;
- $M_n(\sigma) = 3$  si  $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$  ;
- $M_n(\sigma) = 4$  si  $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$  ;
- ...
- $M_n(\sigma) = n+1$  si  $\sigma$  est alternante montante.

En d'autres termes,  $M_n(\sigma) = k+1$ , où  $k$  est le plus grand entier tel que  $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$  soit alternante montante.

On note  $\mathbb{E}(M_n)$  l'espérance de  $M_n$ .

**Q 38.** Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , montrer  $\mathbb{P}(M_n > i) = p_i$ .

**Q 39.** Exprimer  $\mathbb{E}(M_n)$  en fonction de  $p_0, p_1, \dots, p_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n) = \frac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$ .

---

• • • FIN • • •

---