Chapitre 13 — équations différentielles linéaires

1 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 : rappels

Remarques sur l'abus de notation que comporte l'écriture $y' + a(x)y = b(x)$.
Équation homogène associée. Variation de la constante.
Bilan : existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

2 Systèmes différentiels linéaires

2.1 Présentation du problème

On considère une fonction $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une fonction $\mathrm{B} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on leur associe le problème

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t),$$

d'inconnue $\mathrm{X} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On remarque que cette équation équivaut à un système linéaire de n équations différentielles scalaires.

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ est un espace vectoriel (noyau d'une certaine application linéaire), noté E_0 dans la suite.
Si Z est une solution particulière de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\{\mathrm{Z} + \mathrm{Y} \ ; \ \mathrm{Y} \in \mathrm{E}_0\}.$$

2.3 Théorème de Cauchy linéaire

On suppose que A et B sont continues. Alors, pour tout t_0 dans I et tout X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

possède une unique solution sur I.

Cas particulier de l'équation homogène (cas où B est la fonction nulle). L'ensemble E_0 est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Plus précisément, pour tout choix de t_0 dans l'intervalle I, l'application

$$\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(t_0)$$

est un isomorphisme de E_0 sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2.4 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Système de la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{A}\mathrm{X}$.
Effet d'un changement de base. Résolution dans le cas où A est diagonalisable.
Exemple de résolution dans le cas d'une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.

3 Équations différentielles linéaires scalaires

3.1 Présentation du problème

On se donne des fonctions a, b, c définies sur un même intervalle I et on leur associe le problème

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

d'inconnue y, une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On lui associe l'équation différentielle homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

3.2 Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté E_0 dans la suite.

Si f est une solution particulière de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\{f + z\ ;\ z \in \mathrm{E}_0\}.$$

3.3 Mise sous forme d'un système

On introduit la fonction $\mathrm{Y} : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, définie de I vers $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

L'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ équivaut alors à un problème de la forme $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{Y} + \mathrm{B}(t)$.

3.4 Théorème de Cauchy linéaire

Traductions des résultats sur les systèmes d'ordre 1.

Utilisation de l'isomorphisme pour prouver des propriétés de stabilités (parité, périodicité).

3.5 Cas des coefficients constants

On retrouve les résultats admis en première année.

3.6 Utilisation de séries entières

Exemple : $(x^2 - 1)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$.

Résumé de la méthode.

- On considère une série entière $\sum a_n x^n$ et on suppose que son rayon de convergence R est strictement positif.
- On note f sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et on exprime ses deux premières dérivées par dérivation terme à terme.
- On exprime le membre de gauche de l'équation différentielle et on synchronise les exposants pour tout regrouper en un seul développement en série entière.
- Par unicité du développement en série entière, on écrit que f est solution de l'équation différentielle sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une certaine relation de récurrence (et éventuellement certaines conditions initiales).
- *Analyse.* On suppose que f est solution de l'équation différentielle. On itère alors la relation de récurrence pour avoir une expression des a_n puis de f. On prête une attention particulière aux éventuels degrés de liberté.
- *Synthèse.* On définit une ou plusieurs fonctions (selon le nombre de degrés de libertés) par leur développement en série entière. On vérifie que le rayon de convergence est strictement positif — il y a de grandes chances que la règle de d'Alembert puisse servir. On remarque que les coefficients vérifient la relation de récurrence idoine et on en déduit que ces fonctions sont solutions.
- *Bilan.* On peut donner l'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation différentielle considérée.

Programme de colles n° 9 (du lundi 1er au vendredi 12 février 2021)

Tout ce chapitre.
