# Problème I : déterminant de Gram (**)

On fixe un entier $n$ supérieur ou égal à 2 et on considère un espace euclidien E de dimension $n$, dont on note $(\ |\ )$ le produit scalaire. On note également $||\ ||$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour toute famille finie $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E, on note $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_p)$, ou $\mathrm{Gram}(\mathcal{U})$, la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui s'écrit $((u_i|u_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. Cette matrice s'appelle *la matrice de Gram*[1] de la famille $\mathcal{U}$.

En outre, on note $\mathrm{G}(u_1, \dots, u_p)$, ou $\mathrm{G}(\mathcal{U})$, le déterminant de cette matrice. Ce nombre s'appelle *le déterminant de Gram* de la famille $\mathcal{U}$.

**Question 1.** Dans cette question, on considère un couple $(u, v)$ de vecteurs quelconques de E.

**a.** Montrer l'inégalité $\mathrm{G}(u, v) \geqslant 0$.

**b.** Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel P de dimension 2 qui contient les vecteurs $u$ et $v$.

**c.** On considère donc un tel sous-espace vectoriel P et on le munit d'une base orthonormale $\mathcal{B}$.
Montrer l'égalité $\mathrm{G}(u, v) = (\det_{\mathcal{B}}(u, v))^2$.

**d.** À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur la famille $(u, v)$ le nombre $\mathrm{G}(u, v)$ est-il nul ?

**Question 2.** Dans cette question, on fixe un entier $p$ supérieur ou égal à 2 ainsi qu'une famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ de $p$ vecteurs (quelconques) de E.

On introduit une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de l'espace euclidien E et on note A la matrice qui représente la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$.

**a.** Montrer l'égalité $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_p) = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$.

**b.** Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{M})$.

**c.** Montrer que l'égalité $\mathrm{G}(u_1, \dots, u_p) = 0$ équivaut à ce que la famille $\mathcal{U}$ soit liée.

**d.** On suppose dans cette question que la famille $\mathcal{U}$ est libre. On note alors F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{U}$.

Montrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux strictement positifs vérifiant l'égalité

$$\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_p) = {}^t\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}.$$

On pourra pour cela faire appel au théorème de Gram-Schmidt.

**e.** En déduire que si la famille $\mathcal{U}$ est libre, alors son déterminant de Gram est strictement positif.

**Question 3.** Dans cette question, on considère un entier $p$ supérieur ou égal à 2 ainsi qu'une famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E. On suppose de plus que cette famille est libre et on note F le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre.

Par ailleurs, on fixe un vecteur $x$ quelconque de E, que l'on décompose sous la forme $x = y + z$, où $y$ est le projeté orthogonal du vecteur $x$ sur F.

**a.** Rappeler la définition de la distance de $x$ à F, que l'on note $d(x, \mathrm{F})$. Rappeler ce que vaut cette distance en fonction des notations qui viennent d'être introduites.

**b.** Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifiant l'égalité

$$y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k.$$

**c.** À l'aide d'une combinaison linéaire de colonnes bien choisie, montrer l'égalité

$$\mathrm{G}(u_1, \dots, u_p, x) = \mathrm{G}(u_1, \dots, u_p) \times ||z||^2.$$

**d.** En déduire une expression de $d(x, \mathrm{F})$ à l'aide du déterminant de Gram.

1. On l'aura compris, il s'agit du même Gram que celui dont le nom est accolé à Schmidt dans l'intitulé du théorème d'orthogonalisation. Il s'agit du mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850-1916).

**Question 4.** Dans cette question, on fixe un entier $m$ strictement positif et on suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ des polynômes réels de degré au plus $m$.

**a.** Pour tout entier naturel $i$, prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^i \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, de valeur $i!$ .

**b.** Montrer qu'on peut définir un produit scalaire $(\ |\ )$ sur $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ en posant

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}_m[\mathrm{X}])^2, \qquad (\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

**c.** Montrer l'égalité suivante

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty}\Big(t^m - (a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0)\Big)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\ ;\ (a_0,\ldots,a_{m-1}) \in \mathbb{R}^m\right\} = \frac{\mathrm{G}(1,\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^{m-1},\mathrm{X}^m)}{\mathrm{G}(1,\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^{m-1})}.$$

**Question 5.** Le but de cette question est de calculer le quotient qui intervient dans l'expression de la borne inférieure de la question précédente.

Pour cela, on introduit les polynômes $\mathrm{P}_0,\ldots,\mathrm{P}_m$ suivants

$$\mathrm{P}_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1,m]\!], \qquad \mathrm{P}_j = \frac{(\mathrm{X}+j)(\mathrm{X}+j-1)\cdots(\mathrm{X}+1)}{j!}.$$

**a.** Pour tout $j \in [\![0,m]\!]$, préciser le degré du polynôme $\mathrm{P}_j$.

**b.** Montrer qu'il existe des coefficients réels $\lambda_0,\ldots,\lambda_{m-1}$ vérifiant l'égalité suivante

$$\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-m+1)}{m!} = \mathrm{P}_m + \sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j \mathrm{P}_j.$$

**c.** Pour tout entier naturel $s$, on introduit la matrice $\mathrm{M}_s$ de $\mathcal{M}_{s+1}(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{M}_s = \left(\binom{i+j}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant s}$. On remarquera que les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de l'indice 0 pour plus de commodité.

Vérifier l'égalité $\binom{i+j}{j} = \mathrm{P}_j(i)$ pour tout couple $(i,j) \in [\![0,m]\!]^2$ puis, en effectuant l'opération $\mathrm{C}_m \leftarrow \mathrm{C}_m + \sum\limits_{j=0}^{m-1}\lambda_j \mathrm{C}_j$, montrer l'égalité

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M}_m) = \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{M}_{m-1}).$$

**d.** En déduire la valeur du quotient $\dfrac{\mathrm{G}(1,\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^{m-1},\mathrm{X}^m)}{\mathrm{G}(1,\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^{m-1})}$.

---

**Exercice 1.** Soit $\varphi$ une fonction définie, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles. On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

**1.** On considère une fonction $f$ solution de (E) sur $[0,+\infty[$ et on suppose que $f$ est bornée.

**a.** Prouver que la fonction $f''$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

**b.** En déduire que la fonction $f'$ possède une limite en $+\infty$ puis prouver que cette limite est nulle.

**2.** Soient $f$ et $g$ deux solutions de (E) sur $[0,+\infty[$. On introduit la fonction

$$\mathrm{W} = fg' - f'g,$$

appelée *wronskien* du couple $(f,g)$.

**a.** Prouver que la fonction W est constante.

**b.** On suppose que $f$ et $g$ sont bornées. Prouver que la fonction W est nulle puis en déduire que les fonctions $f$ et $g$ sont proportionnelles.

**3.** Prouver que l'équation différentielle (E) possède des solutions non bornées.

---