Chapitre 15 — dénombrement

1 Cardinaux de référence et grands classiques

Cardinaux de $\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, de $\mathcal{P}_k(\mathrm{E})$, de $\mathrm{Perm}(\mathrm{E})$, de $\mathrm{Inj}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Cardinal de $\{(i_1,\dots,i_k)\in [\![1,n]\!]^k\ ;\ i_1<i_2<\dots<i_k\}$, de $\{(i_1,\dots,i_k)\in [\![1,n]\!]^k\ ;\ i_1\leqslant i_2\leqslant\dots\leqslant i_k\}$.
Cardinal de $\{(i_1,\dots,i_k)\in (\mathbb{N}^*)k\ ;\ i_1+\ldots+i_k=n\}$.
Cardinal de $\{(i_1,\dots,i_k)\in \mathbb{N}^k\ ;\ i_1+\ldots+i_k=n\}$.

2 Règles de calcul

Partitions. Lemme des bergers (principe multiplicatif).

Identités avec des coefficients du binôme

$$\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}=\binom{n}{p},\quad \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{p+1}{n+1},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}.$$

3 Exercices

Exercice 1. (*) Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Dénombrer les couples (A,B) de parties de E telles que $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.

2. Dénombrer les couples (A,B) de parties de E telles que $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$.

Exercice 2. (**) Dénombrer les surjections d'un ensemble de cardinal $(n+1)$ sur un ensemble de cardinal n.
Pour cela, on commencera par remarquer que pour une telle application, il y a exactement un élément de l'ensemble de l'arrivée qui possède exactement deux antécédents.

Exercice 3. (*) Jean-Pignon doit descendre un escalier de n marches. Selon l'inspiration du moment, il franchit une ou deux marches à la fois. Une *descente* de cet escalier peut ainsi être modélisée par une suite finie d'entiers égaux à 1 ou 2 dont la somme vaut n. Le nombre de descentes d'un escalier de n marches est noté d_n. Par convention, on décide que d_0 vaut 1 (l'unique descente d'un escalier vide s'effectue en ne faisant rien).
Voici toutes les descentes d'un escalier à 4 marches

$$(1,1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(2,2).$$

On voit que d_4 vaut 5.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer l'égalité

$$d_n=d_{n-1}+d_{n-2}.$$

Pour cela, on partitionnera l'ensemble des descentes d'un escalier de n marches selon la longueur du dernier pas.

3. Vérifier que cette relation de récurrence est encore valable pour $n=2$. Obtenir ensuite une expression de d_n en fonction de n à l'aide des nombres

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{et}\qquad\theta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

4. Soit n un entier strictement positif. En partitionnant l'ensemble des descentes d'un escalier de n marches selon le nombre de pas de deux marches, obtenir l'expression

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}.$$

Vérifier que cette expression est encore valable pour $n=0$.

5. Écrire une fonction en Python qui renvoie la valeur de d_n. Cette fonction s'appuiera sur la formule de récurrence.
