## Probabilités sur un univers fini

**Exercice 1. (*)** On lance $n$ fois une pièce.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements $\mathrm{P}_k =$ [On a fait `pile` au $k$-ième lancer.] et $\mathrm{F}_k =$ [On a fait `face` au $k$-ième lancer.]. Exprimer à l'aide des événements de la forme $\mathrm{P}_k$ et $\mathrm{F}_k$ les événements suivants :

A = [On a fait `pile` à tous les lancers.] ;
B = [On a fait `pile` à au moins un lancer.] ;
C = [On a fait `pile` à au moins un lancer, mais pas au cours des deux premiers.] ;
D = [On a fait `pile` pour la première fois à l'avant-dernier lancer.] ;
E = [On n'a jamais obtenu la succession `(pile, face)`.] ;
F = [On a fait `pile` exactement une fois.] ;
G = [On a fait `pile` exactement deux fois.].

---

**Exercice 2. (*)** Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.

---

**Exercice 3. (**)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{k/n} - 1\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire $\mathrm{X}_n$ dont la loi est donnée par

$$\mathrm{X}_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{k/n} - 1}{\alpha_n}.$$

**a.** Trouver un équivalent de $\alpha_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** On note $\mathrm{F}_n$ la fonction de répartition de $\mathrm{X}_n$. Exprimer $\mathrm{F}_n(x)$ pour tout $x$ réel.

**c.** Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ continue, à exprimer explicitement.

**d.** Montrer que la convergence est uniforme.

---

**Exercice 4. (*)** On lance deux dés équilibrés à $n$ faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires $\mathrm{U}_1$ et $\mathrm{U}_2$, supposées indépendantes.

On pose $\mathrm{X} = \min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$.

**a.** Déterminer la loi et l'espérance de X.

**b.** Calculer $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ en fonction de $\mathrm{U}_1$ et $\mathrm{U}_2$. En déduire l'espérance de Y.

**c.** Calculer de même XY et en déduire la covariance de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

---

**Exercice 5. (**)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_k$ indépendantes, de loi uniforme sur l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note

$$\mathrm{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{U}_1})\right)$.

**a.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, prouver l'inégalité $\varphi(\lambda) \leqslant \lambda^2/2$.

**b. (***)** Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$, prouver l'inégalité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

**c.** En déduire l'inégalité de Hoeffding

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

---

**Exercice 6. (*)** On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}_n$ l'événement « *Le n-ième lancer a donné pile.* » et on note $\mathrm{F}_n$ son événement contraire.

Pour tout entier $n$, on note $\mathrm{D}_n$ l'événement « *Lors des n premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* » La probabilité de l'événement $\mathrm{D}_n$ est notée $d_n$.

**a.** Calculer $d_0$, ainsi que $d_1$ et $d_2$.

**b.** Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n.$$

**c.** En déduire une expression de $d_n$ en fonction de $n$ puis sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$. Interpréter.

---

**Exercice 7. (*)** On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession `(pile, pile, face)` apparaît avant qu'une succession `(face, pile, pile)` n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession `(face, pile, pile)` apparaît avant qu'une succession `(pile, pile, face)` n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

**a.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{N}_n$ l'événement « *Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des n premiers lancers.* »

Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{N}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{N}_2)$.

**b.** Pour tout entier $n \geqslant 3$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{N}_n) = 2^{-n} + d_n$.

**c.** En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

**d.** Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

---

**Exercice 8. (*)** Montrer qu'en posant $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la loi d'une variable aléatoire discrète X. Possède-t-elle une espérance ? La variable aléatoire $(-1)^{\mathrm{X}}\,\mathrm{X}$ possède-t-elle une espérance ?

---

**Exercice 9. (*) a.** Montrer l'existence d'une constante $c$ telle qu'on définisse la loi d'une variable aléatoire discrète X en posant $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{c}{k^3+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**b.** Montrer que X possède une espérance, mais pas de variance.

---

**Exercice 10. (*)** Montrer que si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors la valeur maximale de $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ est atteinte pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

---

**Exercice 11. (*)** Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/(\mathrm{X}+1))$ et calculer sa valeur.

---

**Exercice 12. (*)** Soit $p \in \,]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})$ et calculer sa valeur.

---

**Exercice 13. (**)** Soit $p \in \,]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Z sachant $[\mathrm{X} = k]$ soit uniforme sur $[\![0, k-1]\!]$.

**a.** Donner $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Z} = j)$ pour tout $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

**b.** Déterminer la loi de Z (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

**c. (***)** Prouver l'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ et calculer sa valeur.

---

**Exercice 14. (*)** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note Z le maximum des nombres X et Y. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

**a.** Justifier que Z est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.

**b.** Déterminer les lois de S et de D.

**c.** Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

---

**Exercice 15. (**)** Soit $p$ dans $]0,1[$. Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k$.

**a.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction génératrice de $\mathrm{S}_n$. En déduire sa loi.

**b.** Déterminer la loi de $\mathrm{T}_1$ sachant $[\mathrm{S}_2 = k]$. Interprétation.

**c.** Pour tout $n \geqslant 2$, calculer l'espérance de $\dfrac{n-1}{\mathrm{S}_n - 1}$.

---

**Exercice 16. (*)** On considère deux variables X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

**a.** Montrer que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

**b.** Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n]$. Reconnaître une loi usuelle.

---

**Exercice 17. (*)** On considère deux variables aléatoires X et Z. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel $n$ la loi de X sachant $[\mathrm{Z} = n]$ est $\mathcal{B}(n,p)$.

Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

---

**Exercice 18. (*)** Soit X une variable aléatoire strictement positive. prouver l'inégalité $\mathbb{E}\left(\mathrm{X} + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) \geqslant 2$.

---

**Exercice 19. (**)** Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes, de même loi.

Prouver l'inégalité $\mathbb{E}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) \geqslant 1$.

---

**Exercice 20. (***)** Soient $\mathrm{X}_0$ et $\mathrm{Y}_0$ deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$.

On suppose que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit la même loi que $\mathrm{X}_0 + \mathrm{Y}_0$. Montrer que X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

---

**Exercice 21. (**)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{k/n} - 1\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire $\mathrm{X}_n$ dont la loi est donnée par

$$\mathrm{X}_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!],\quad \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{k/n} - 1}{\alpha_n}.$$

**a.** Trouver un équivalent de $\alpha_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** On note $\mathrm{F}_n$ la fonction de répartition de $\mathrm{X}_n$. Exprimer $\mathrm{F}_n(x)$ pour tout $x$ réel.

**c.** Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ continue, à exprimer explicitement.

**d.** Montrer que la convergence est uniforme.

---