PC* — mathématiques **jeudi 24 février 2021**
Devoir surveillé n° 6 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème I — d'après Mines-Ponts 2012 PSI maths 2

On fixe une fois pour toutes un entier n strictement positif.

On note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. L'identité de $\mathcal{L}_n$ est notée Id_n.

On rappelle que les puissances d'un endomorphisme T de $\mathbb{R}^n$ sont définies par $\mathrm{T}^0 = \mathrm{Id}_n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{T}^k = \underbrace{\mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}}_{k \text{ fois}}.$$

Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est noté $(x|y)$. On rappelle qu'il est donné par

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

La norme euclidienne canonique d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est notée $||x||$. On rappelle qu'elle est donnée par

$$||x|| = \sqrt{(x|x)}.$$

Pour tout élément S de $\mathcal{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(\mathrm{S})$.

À tout élément S de $\mathcal{L}_n$, on associe la fonction $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$, à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par

$$\mathcal{Q}_\mathrm{S}(x) = \frac{(\mathrm{S}(x)|x)}{||x||^2}.$$

La fonction $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ s'appelle *le quotient de Rayleigh* de S.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout élément T de $\mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{T})$ le minimum et le maximum de $\sigma(\mathrm{T})$.

Dire qu'un élément T de $\mathcal{S}_n$ est *positif* signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x|\mathrm{T}(x)) \geqslant 0.$$

L'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{S}_n$ est noté $\mathcal{S}_n^+$.

Dire qu'un élément T de $\mathcal{S}_n$ est *défini positif* signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x|\mathrm{T}(x)) > 0.$$

L'ensemble des éléments définis positifs de $\mathcal{S}_n$ est noté $\mathcal{S}_n^{++}$.

Partie I — Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie, on se donne un élément T de $\mathcal{S}_n$.

Question 1. Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. Montrer que $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.

Question 2. Montrer que la fonction $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$ atteint les valeurs $m(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{T})$.

Question 3. Démontrer les égalités

$$m(\mathrm{T}) = \min\{\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}(\mathrm{T}) = \max\{\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T à cet effet.

Question 4. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+ \iff \sigma(\mathrm{T}) \subset [0, +\infty[$$

et l'équivalence

$$\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^{++} \iff \sigma(\mathrm{T}) \subset]0, +\infty[.$$

Question 5. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient $\sigma(\mathrm{T})$. Soit f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe exactement un élément U de $\mathcal{L}_n$ tel que

$$\forall \lambda \in \sigma(\mathrm{T}), \quad \forall y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_n), \quad \mathrm{U}(y) = f(\lambda) y.$$

Montrer de plus que cet endomorphisme U est symétrique.

Dans la suite du sujet, cet endomorphisme U est noté $f(\mathrm{T})$.
On peut donc considérer que la fonction f est aussi une fonction de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n$.

Question 6. On considère un polynôme réel $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathrm{X}^j$.

Montrer l'égalité $\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathrm{T}^j$.

Question 7. Pour toute fonction $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un polynôme réel P tel que $f(\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{T})$.

Question 8. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de $f(\mathrm{T})$ en fonction de ceux de T.

Question 9. Étant donné deux fonctions f et g de J dans $\mathbb{R}$, prouver l'égalité $(f \times g)(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})$.

Question 10. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}$. On prend $\mathrm{J} =]0, +\infty[$ et $f : t \mapsto 1/t$.

Prouver l'égalité $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}^{-1}$ (bijection réciproque de S).

Question 11. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+$. On prend $\mathrm{J} = [0, +\infty[$ et $f : t \mapsto \sqrt{t}$.

L'endomorphisme $f(\mathrm{S})$ est alors noté $\mathrm{S}^{1/2}$. Prouver l'égalité $(\mathrm{S}^{1/2})^2 = \mathrm{S}$.

Question 12. On se donne un vecteur $a = (a_1, \ldots, a_n)$ non nul de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'endomorphisme

$$\mathrm{T}_a : x \mapsto (a|x)a$$

de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que T_a est un élément de $\mathcal{S}_n^+$ et déterminer $(\mathrm{T}_a)^{1/2}$.

Partie II — Une relation d'ordre

Étant donné deux éléments T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$, on définit la relation $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$ par l'équivalence

$$\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \iff \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^+.$$

Question 13. Montrer que cette relation est réflexive et transitive.

Question 14. Montrer que cette relation est antisymétrique, c'est-à-dire

$$\forall (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) \in (\mathcal{S}_n)^2, \quad ((\mathrm{T}_1 \geqslant \mathrm{T}_2) \text{ et } (\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1)) \Rightarrow \mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2.$$

Question 15. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$. Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$ tels que $\mathrm{T}_1 \geqslant \mathrm{T}_2$.

Démontrer alors la relation $\mathrm{S} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{S} \geqslant \mathrm{S} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{S}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Dire que f est un *opérateur croissant* signifie que pour tout couple $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ d'éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifiant les inclusions $\sigma(\mathrm{T}_1) \subset \mathrm{J}$ et $\sigma(\mathrm{T}_2) \subset \mathrm{J}$, on a l'implication

$$\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \Rightarrow f(\mathrm{T}_2) \geqslant f(\mathrm{T}_1).$$

Question 16. Dans cette question, on prend $\mathrm{J} = [0, +\infty[$ et $f : t \mapsto t^2$.

On considère les endomorphismes T_1 et T_2 de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivement.

À l'aide de T_1 et T_2, montrer que f n'est pas un opérateur croissant.

Question 17. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer l'égalité

$$(\mathrm{S}^{1/2})^{-1} = (\mathrm{S}^{-1})^{1/2}.$$

Cette matrice est notée $\mathrm{S}^{-1/2}$.

Question 18. Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}$ tels que $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$.

En utilisant la question 15 avec le choix $\mathrm{U} = \mathrm{T}_2^{-1/2}$, montrer que les valeurs propres de $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ sont inférieures ou égales à 1.

En déduire la relation $\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \geqslant \mathrm{Id}_n$.

Question 19. On prend $\mathrm{J} =]0, +\infty[$ et $f : t \mapsto -1/t$.

Montrer que f est un opérateur croissant.

Problème II — d'après Centrale PSI 2013 Maths 1

On fixe $\lambda > 0$ et on lui associe l'équation différentielle (G_λ) suivante

$$z'' + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2}\right) z = 0,$$

que l'on étudie sur $]0, +\infty[$.

On fixe un élément x_0 de $]0, +\infty[$ ainsi qu'une solution z de (G_λ) sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Question 20. On note $\mathcal{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de (G_λ), à valeurs réelles.
Rappeler, avec justifications, la structure algébrique de $\mathcal{S}_\lambda$.

Question 21. On définit sur $]0, +\infty[$ une fonction v par la formule

$$v(x) = z(x) - \lambda \int_{x_0}^{x} z(u) \sin(u - x) \frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

a. Montrer que v est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $v'' + v$.

b. En déduire qu'il existe des constantes A et B telles que

$$\forall x > 0, \quad z(x) = \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} z(u) \sin(u - x) \frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

Question 22. Pour tout $x > 0$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} |z(u)| \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$.

a. Trouver des constantes μ et M, exprimées en fonction de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda$, telles que

$$\forall x \geqslant x_0, \qquad h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{x^2}.$$

b. En déduire que h est bornée sur $[x_0, +\infty[$ puis que z est bornée sur ce même intervalle.

Pour cela, on pourra utiliser une méthode de facteur intégrant.

Question 23. Justifier la relation

$$\int_{x}^{+\infty} z(u) \sin(u - x) \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

Question 24. Montrer qu'il existe des constantes α et β telles que

$$z(x) = \alpha \cos(x - \beta) + \mathcal{O}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Question 25. On suppose que α n'est pas nul. Montrer que z admet une infinité de zéros sur $]0, +\infty[$.