ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2013 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Dans ce problème, $n \geqslant 2$ est un entier et $\mathbf{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. La transposée d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n$ est notée ${}^tA$. Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques est noté $\mathbf{S}_n$. Enfin, le groupe orthogonal est noté $\mathbf{O}_n$. On utilisera la notation de Kronecker

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

On munit l'espace $\mathbf{M}_n$ de la norme euclidienne

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij})^2}$$

où les a_{ij} sont les coefficients de A. On pourra utiliser la formule $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$.

Si $\theta \in \mathbb{R}$ et si $p < q$ sont des entiers entre 1 et n, on désigne par $R_{p,q}(\theta)$ la matrice $n \times n$ dont les coefficients r_{ij} sont donnés, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, par

$$r_{ij} = \begin{cases} \delta_i^j & \text{si} \quad j \neq p, q, \\ \delta_i^j & \text{si} \quad i \neq p, q, \\ \cos\theta & \text{si} \quad i = j = p \text{ ou } q, \\ \sin\theta & \text{si} \quad i = q \text{ et } j = p, \\ -\sin\theta & \text{si} \quad i = p \text{ et } j = q. \end{cases}$$

Par exemple,

$$R_{1,2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} & O_{2\times(n-2)} \\ O_{(n-2)\times 2} & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Soit $(A^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de matrices dans $\mathbf{M}_n$. On dit que $A^{(m)}$ *converge vers* A si $A \in \mathbf{M}_n$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \|A^{(m)} - A\| = 0.$$

Il revient au même de dire que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, la suite des coefficients $a_{ij}^{(m)}$ de $A^{(m)}$ converge vers a_{ij}, le coefficient de A correspondant.

1 Préliminaires

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de $R_{p,q}(\theta)$?
2. Calculer le produit ${}^t(R_{p,q}(\theta))R_{p,q}(\theta)$. Quelle propriété de $R_{p,q}(\theta)$ reconnaît-on ?
3. On se donne $S \in \mathbf{S}_n$ et $R \in \mathbf{O}_n$. Vérifier que ${}^tRSR$ est symétrique et qu'elle est semblable à S.
4. Soit $A \in \mathbf{M}_n$ et $U, V \in \mathbf{O}_n$. Montrer que $\|UAV\| = \|A\|$.
5. On se donne quatre nombres réels $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ tels que $a + d = b + c$. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto |x-a|-|x-b|-|x-c|+|x-d|$; montrer qu'elle est à valeurs positives. *Un raisonnement étayé par une représentation graphique sera le bienvenu.*

2 Conjugaison par une matrice de rotation

On se donne une matrice $S \in \mathbf{S}_n$, un angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et des entiers $1 \leqslant p < q \leqslant n$ tels que $s_{pq} \neq 0$. On définit $S' = {}^tR_{p,q}(\theta)SR_{p,q}(\theta)$ et on note s'_{ij} ses coefficients.

6. Montrer que $s'_{qq} + s'_{pp} = s_{qq} + s_{pp}$.
7. Exprimer les coefficients s'_{ij} de S' en fonction de ceux de S.
8. On cherche un angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour lequel on ait $s'_{pq} = 0$.
   (a) Montrer que $s'_{pq} = 0$ si et seulement si $t = \tan\theta$ satisfait l'équation

   $$t^2 + \frac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}}\, t - 1 = 0. \tag{1}$$

   (b) Montrer que cette équation admet une solution $t_0 \in \left]-1, 1\right]$ et une autre $t_1 \notin \left]-1, 1\right]$. Quelle est la relation entre les angles θ_0 et θ_1 qui correspondent à ces racines ?
   (c) Dans toute la suite, on choisit l'une des deux racines t de l'équation (1). On a donc $s'_{pq} = 0$. *Un choix plus précis sera fait à partir de la question 12.*
   Vérifier que $s'_{pp} - s_{pp} = ts_{pq}$; établir une formule analogue pour $s'_{qq} - s_{qq}$.
   (d) On décompose S sous la forme $S = D + E$ avec D diagonale et E à diagonale nulle. On décompose de même $S' = D' + E'$. Calculer $\|E'\|^2$ en fonction de $\|E\|^2$ et de $(s_{pq})^2$.

(e) En justifiant que $\|S'\| = \|S\|$, en déduire une expression de $\|D'\|^2$ au moyen de $\|D\|^2$ et de $(s_{pq})^2$.

9. Montrer que les coefficients de S' s'expriment uniquement en fonction de ceux de S et de la racine (t_0 ou t_1) qu'on a choisie.

10. On suppose dans cette question que s_{pq} est le coefficient de plus grande valeur absolue de E.

    (a) Montrer que $\|E'\| \leqslant \rho\|E\|$ où $\rho < 1$ est une constante que l'on explicitera.

    (b) Si on choisit la racine t_0, montrer en outre que $\|D' - D\| \leqslant \|E\|$.

11. En calculant $(s'_{qq} - s'_{pp})^2 - (s_{qq} - s_{pp})^2$, montrer que
$$|s'_{qq} - s'_{pp}| \geqslant |s_{qq} - s_{pp}|.$$

12. **Dorénavant, et jusqu'à la fin du problème, on choisit la racine t_0 de (1) et donc l'angle θ_0, mentionnés à la Question 8b.**

    (a) Montrer que $s_{pp} - s'_{pp}$ et $s'_{qq} - s_{qq}$ sont du même signe que $s_{qq} - s_{pp}$.

    (b) Si $1 \leqslant i \leqslant n$, montrer que
$$|s_{ii} - s'_{qq}| + |s_{ii} - s'_{pp}| - |s_{ii} - s_{pp}| - |s_{ii} - s_{qq}| \geqslant 0.$$

13. On définit
$$R = \sum_{i,j=1}^{n} |s_{jj} - s_{ii}| \qquad \text{et} \qquad R' = \sum_{i,j=1}^{n} |s'_{jj} - s'_{ii}|.$$
Montrer que
$$R' - R \geqslant 2(|s'_{qq} - s_{qq}| + |s'_{pp} - s_{pp}|) = 2\sum_{i=1}^{n} |s'_{ii} - s_{ii}|.$$

3 Algorithme de Jacobi incomplet

Dans l'algorithme de Jacobi, on part d'une matrice $\Sigma \in \mathbf{S}_n$ et on construit une suite de matrices symétriques $\Sigma^{(m)}$, dont les coefficients sont notés $\sigma_{ij}^{(m)}$, de la façon suivante :

- On pose $\Sigma^{(0)} = \Sigma$.
- Lorsque $\Sigma^{(m)}$ est connue, on choisit un couple (p_m, q_m) avec $p_m < q_m$.
- On applique alors les calculs de la Partie 2 à la matrice $S = \Sigma^{(m)}$ et au couple $(p, q) = (p_m, q_m)$: on forme la matrice S' étudiée dans cette partie, et on l'appelle $\Sigma^{(m+1)}$.

À ce stade, on ne précise pas la manière de choisir (p_m, q_m) ; c'est pourquoi l'algorithme est dit *incomplet*.

14. On définit
$$R_m = \sum_{i,j=1}^{n} |\sigma_{jj}^{(m)} - \sigma_{ii}^{(m)}|, \qquad \varepsilon_m = \sum_{i=1}^{n} |\sigma_{ii}^{(m+1)} - \sigma_{ii}^{(m)}|.$$
Vérifier que $R_{m+1} - R_m \geqslant 2\varepsilon_m$. En déduire que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$ est convergente.

15. On décompose $\Sigma^{(m)}$ sous la forme $D^{(m)} + E^{(m)}$ où $D^{(m)}$ est diagonale et $E^{(m)}$ est à diagonale nulle. Montrer que la suite $(D^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera D sa limite.

4 Convergence et polynôme caractéristique

Soit $(A^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{M}_n$. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la matrice $A^{(m+1)}$ est semblable à $A^{(m)}$.

16. Montrer que $A^{(m)}$ est semblable à $A^{(0)}$.

17. On suppose de plus que cette suite converge vers une matrice diagonale D. Si P_m désigne le polynôme caractéristique de $A^{(m)}$, montrer que les coefficients de P_m convergent vers ceux du polynôme caractéristique de D quand $m \to +\infty$.

    En déduire que le polynôme caractéristique de D est égal à celui de $A^{(0)}$.

18. Finalement, montrer que les termes diagonaux de D sont les valeurs propres de $A^{(0)}$. Que peut-on dire de leurs multiplicités ?

5 Algorithme de Jacobi ; version optimale

Dans la version optimale de l'algorithme de Jacobi, on choisit pour chaque m un couple (p_m, q_m) de sorte que la valeur absolue du coefficient $\sigma_{ij}^{(m)}$ soit maximale précisément quand $(i,j) = (p_m, q_m)$. Autrement dit,

$$\forall i < j, \qquad |\sigma_{ij}^{(m)}| \leqslant |\sigma_{p_m q_m}^{(m)}|.$$

19. Montrer que pour $m \to +\infty$, la suite $(\Sigma^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice diagonale D.

20. Montrer alors que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de Σ.

21. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\|D - D^{(m)}\| \leqslant \frac{\rho^m}{1-\rho}\|E^{(0)}\|.$$

22. En vous appuyant sur les réponses aux questions précédentes, donnez votre avis quant à la rapidité de la convergence des $d_{ii}^{(m)}$ vers les valeurs propres de Σ.

Les propriétés de la méthode de Jacobi sont aujourd'hui encore mal comprises. Dans sa version optimale, et sous l'hypothèse que les valeurs propres de Σ sont simples, elle converge au moins quadratiquement, et probablement encore plus vite. L'estimation de la question 21 est donc grossière. Elle est d'ailleurs satisfaite "en moyenne" lorsqu'on choisit (p_m, q_m) au hasard, ce qui entraine la convergence "presque surement".

⋆ ⋆
⋆