Chapitre 17 — topologie des espaces vectoriels normés

1 Topologie

1.1 Point intérieur et parties ouvertes

Définition d'un point intérieur, d'une partie ouverte.

Exemples fondamentaux (l'espace E tout entier, l'ensemble vide, les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, les boules ouvertes, les demi-plans ouverts). Les boules fermées ne sont pas des ouverts.

Stabilité par réunion quelconque et par intersection finie. Contre-exemple d'une intersection infinie : le singleton $\{a\}$ est l'intersection des boules ouvertes $\mathrm{B}(a, 1/n)$ où n décrit $\mathbb{N}^*$.

Intérieur d'une partie A de E. C'est l'ensemble des points intérieurs à A. C'est le plus grand ouvert de E contenu dans A.

1.2 Parties fermées et points adhérents

Définition. Caractérisation séquentielle. Exemples fondamentaux (l'ensemble vide, l'espace E tout entier, les boules fermées, les sphères, les demi-plans fermés, les droites du plan, les parties finies de E). Les boules ouvertes ne sont pas fermées.

Stabilité par intersection quelconque et par réunion finie. Contre-exemple d'une réunion infinie : la boule ouverte $\mathrm{B}(a, 1)$ est la réunion des boules fermées $\mathrm{B}_f(a, 1-2^{-n})$ où n décrit $\mathbb{N}$.

Point adhérent. Exemples (points de la sphère pour une boule ouverte, limite d'une suite). Caractérisation séquentielle.

Dans $\mathbb{R}$, tout nombre réel est un point adhérent à $\mathbb{Q}$.

Adhérence d'une partie A. C'est l'ensemble des points adhérents à A. C'est le plus petit fermé de E qui contient A.

1.3 Frontière

Définitions. Exemples (avec des boules ou des ensembles de termes d'une suite).

2 Limite d'une fonction, continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point adhérent

Définition. Continuité et prolongement par continuité.

Exemples de référence : les fonctions coordonnées.

Stabilité (combinaison linéaire, produit, composition).

Exemples plus compliqués (exercice de la fiche).

2.2 Caractérisation séquentielle

Énoncé. Exemples.

2.3 Propriétés topologiques

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$.

Pour tout α réel, l'ensemble $\{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) < \alpha\}$ est ouvert ; les ensembles $\{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) \leqslant \alpha\}$ et $\{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) = \alpha\}$ sont fermés. Exemple : l'ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.4 Fonctions lipschitziennes

Définition. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de E vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, alors la fonction N est 1-lipschitzienne.

Cas des applications linéaires.

Dans un espace préhilbertien, les projections orthogonales sont 1-lipschitziennes (ce sont d'ailleurs les seules projections qui sont 1-lipschitziennes).

2.5 Cas de la dimension finie

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit A une partie de E_1. Soit f une fonction de A dans E_2. On considère une base $(d_1, \ldots, d_n)$ de E_2. Pour tout x de A, on considère la décomposition du vecteur $f(x)$ dans cette base

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) d_k,$$

ce qui définit des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de A dans $\mathbb{R}$.

Alors la continuité de f équivaut à celle des fonctions $f_1, \ldots, f_n$.

Continuité des applications linéaires (elles sont lipschitziennes) et des applications multilinéaires (elles sont polynomiales).

Le déterminant est une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conséquence : l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le produit matriciel est continu.

2.6 Existence d'extremums

Existence d'un extremum pour une fonction continue sur un fermé borné.

Application : norme d'opérateur pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Norme triple d'une matrice.

Exercice 1. (*) Montrer que l'adhérence de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (**) Parmi les identités suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B); \quad \mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B); \quad \mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B); \quad \mathrm{Adh}(A \cap B) = \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$$

Exercice 3. (**) Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, || \; ||)$.

Montrer l'égalité $\mathrm{Adh}(\mathrm{Int}(\mathrm{Adh}(U))) = \mathrm{Adh}(U)$.

Exercice 4. (*) Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, || \; ||)$.

Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Exercice 5. (**) Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, || \; ||)$.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par U est égal à E.

Exercice 6. (**) On définit de E dans E la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\max(1, ||x||)}.$$

Montrer que la fonction f est 2-lipschitzienne.
