

# Chapitre 18 — fonctions de plusieurs variables

## 1 Retour sur la continuité des fonctions

### 1.1 Quelques exemples de limites

Chacune des fonctions suivantes est définie et continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . On étudie l'existence d'une limite en l'origine.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad i : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

### 1.2 Propriétés topologiques

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Soit  $f$  une fonction continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha$  réel, l'ensemble

$$\{x \in E ; f(x) < \alpha\}$$

est ouvert et les ensembles

$$\{x \in E ; f(x) \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in E ; f(x) = \alpha\}$$

sont fermés.

Exemples : si  $E$  est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  est fermé dans  $E$  ; si  $E$  est un espace préhilbertien, alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie est fermé dans  $E$ .

### 1.3 Théorème des bornes atteintes

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $K$  une partie non vide, fermée et bornée de  $E$ . Soit  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

La fonction  $f$  possède alors un maximum et un minimum sur  $K$ .

Exemple : la fonction  $x \mapsto (x|f(x))$  admet un maximum et un minimum sur la sphère unité d'un espace euclidien.

## 2 Dérivation

### 2.1 Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs réelles.

Notations  $\partial_i f(a)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

### 2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  : en tout point, la fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 selon toutes les coordonnées et les fonctions  $\partial_i f$  sont toutes continues sur  $U$ . Gradient.

Stabilité par combinaison linéaire, par produit.

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $g$  est une fonction d'une variable de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle qui contient  $f(U)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. Unicité du développement limité.

La classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  implique la continuité.

### 2.3 Différentielle

La différentielle de  $f$  au point  $a$  est l'application

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \times \partial_i f(a) = (\nabla f(a)|h).$$

Le nombre  $df(a)(h)$  est aussi noté  $df(a) \cdot h$ .

## 2.4 Règle de la chaîne

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $\gamma$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $U$ . La fonction  $f \circ \gamma$  est alors de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , de dérivée

$$t \mapsto df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = ((\nabla f)(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = \sum_{i=1}^p \partial_i f(\gamma(t)) \gamma'_i(t).$$

Dérivation de fonctions de la forme  $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ .

Cas des coordonnées polaires. Expression du gradient en coordonnées polaires.

## 2.5 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition. Notations  $\partial_{i,j}^2 f$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Théorème de Schwarz.

Contre-exemple en l'absence de la classe  $\mathcal{C}^2$  : la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Expression du laplacien en coordonnées polaires.

## 3 Équations aux dérivées partielles

### 3.1 Ordre un

Résolution de  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , de  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , de  $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ , de  $\frac{\partial f}{\partial x} = xf$ .

### 3.2 Ordre deux

Résolution de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ , de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ , de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ .

## 4 Extremums

Extremum global, extremum local.

Existence d'un extremum global d'une fonction continue sur un fermé borné.

Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  possède un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Minimisation des fonctions de la forme  $(a, b) \mapsto \|\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{n}\|^2$ . Régression linéaire.

Utilisation des coordonnées polaires : extremums de  $f : (x, y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$  et de  $g : (x, y) \mapsto (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ .