

## Régularité des fonctions

**Exercice 1. (\*)** On pose  $f(x, y) = 0$  si  $y = 0$  et  $f(x, y) = y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$  sinon.

Montrer que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  et  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  existent mais pas  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ .

**Exercice 2. (\*)** On pose  $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

**Exercice 3. (\*)** On pose  $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ . La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

**Exercice 4. (\*\*)** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $q(x, y) = \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$ .

- a. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , simplifier l'expression  $1 - q(x, y)^2$ .
- b. En déduire que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \text{Arccos}(q(x, y))$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- c. Sur un ensemble  $\mathcal{D}$  à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction  $f$ .
- d. En déduire une simplification de l'expression  $f(x, y)$ . Interpréter géométriquement.

**Exercice 5. (\*\*)** On considère la fonction dét, définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , interprétée comme une fonction de  $n^2$  variables.

- a. Déterminer la différentielle de cette fonction en  $I_n$ .
- b. Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

## Extremums

**Exercice 6. (\*)** On définit de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  la fonction  $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ .

- a. Représenter l'ensemble  $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ; 1 - x - y \geq 0\}$ .
- b. Montrer que  $f$  admet sur  $D$  un maximum, que l'on déterminera.

**Exercice 7. (\*)** Déterminer les extremums sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2) \exp(-x^2 - y^2)$ .

**Exercice 8. (\*)** Déterminer les extremums sur  $[0, \pi]^2$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ .

**Exercice 9. (\*)** Trouver les extremums de la fonction  $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 - xy$  sur l'ensemble  $D$  défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

**Exercice 10. (\*\*)** On définit sur  $[0, +\infty[^2$  une fonction  $f$  en posant  $f(0, 0) = 0$  et

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

- a. Montrer que cette fonction est continue.
- b. Trouver les points critiques de  $f$  dans l'ouvert  $]0, +\infty[^2$ .
- c. Pour tout  $(x, y) \in ([0, +\infty[^2$  tel que  $x + y \geq 8$ , montrer la majoration  $f(x, y) < 1/8$ .
- d. Déterminer les extremums de la fonction  $f$  sur  $([0, +\infty[^2$ .

**Exercice 11. (\*)** On pose  $D = [-1, 1] \times \mathbb{R}$  et on définit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2} \cos(y)$  sur  $D$ .

- Déterminer les points critiques de  $f$  sur une région  $\Delta$  à préciser.
- Pour tout  $(x, y) \in D$ , prouver la minoration  $f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$ .
- Étudier les extremums de  $f$  sur  $D$ .

**Exercice 12. (\*\*)** Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  à ceux de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On se donne une matrice  $A$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et un vecteur  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . On définit la fonction

$$f : X \mapsto \frac{1}{2} X^T \cdot A \cdot X - B^T \cdot X$$

de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Exprimer le gradient de  $f$ .
- Si  $A$  est symétrique définie positive, montrer que  $f$  possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.
- (\*\*\*) Montrer que  $f$  possède un minimum si et seulement si la matrice  $A$  est symétrique positive et  $B$  est dans l'image de  $A$ .

### Équations aux dérivées partielles

**Exercice 13. (\*\*)** On note  $\Omega$  le complémentaire de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  et on considère une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . On fixe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dire que la fonction  $f$  est *positivement homogène* de degré  $\alpha$  signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in ]0, +\infty[, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que  $f$  est positivement homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

**Exercice 14. (\*\*)** Résoudre sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

à l'aide du changement de variables  $(u, v) = (xy, x/y)$ .

**Exercice 15. (\*\*)** Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  telles que la fonction  $\hat{f} : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x}{y+z}\right)$  soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul) sur  $]0, +\infty[^3$ .

**Exercice 16. (\*\*)** On note  $U$  l'ouvert  $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On se donne une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ , à valeurs réelles, et on définit sur  $U$  la fonction

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

- Pour tout  $i$  dans  $[[1, n]]$ , exprimer la fonction  $\partial^2 F / \partial x_i^2$ .
- En déduire une expression du laplacien de  $F$ , défini par  $\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ .
- Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction  $f$  pour que la fonction  $F$  soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).