Exercice 1. (**) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose

$$\mathrm{A} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n.$$

1. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est convergente. Prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ est nul.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est divergente. On veut prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $\mathrm{I}_p = \bigcap_{n\geqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}$.

a. Pour tout $x \geqslant 0$, prouver l'inégalité $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit un entier $r \geqslant p$. Prouver l'inégalité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\geqslant n\geqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{r\geqslant n\geqslant p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right)$.

c. En déduire que I_p est de probabilité nulle.

d. Conclure. (On a alors démontré le *lemme de Borel-Cantelli.)*

Exercice 2. (**) Soit $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction. On suppose que f est décroissante et qu'elle vérifie la relation

$$\forall (u, v) \in [0, +\infty[^2, \quad f(u + v) = f(u) \times f(v).$$

Le but de cet exercice est de prouver l'identité

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad f(u) = f(1)^u.$$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $[0, +\infty[$, prouver la relation $f(nx) = f(x)^n$.

b. Pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$, prouver la relation $f(q) = f(1)^q$.

c. Conclure.

Exercice 3. (*) Un alien arrive sur Terre. Un jour donné, il effectue l'une de ces quatre actions, de manière équiprobable :

- il meurt ;
- il ne fait rien ;
- il produit un clone ;
- il produit deux clones.

Ses éventuels clones ont le même comportement et les actions choisies par divers clones sont indépendantes.

Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que les aliens disparaissent tous.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « L'espèce alien s'est éteinte au cours des n premiers jours. » et on note a_n la probabilité de cet événement.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Trouver les points fixes dans $[0, 1]$ de la fonction $f : x \mapsto (1 + x + x^2 + x^3)/4$. Le plus petit d'entre eux est noté r.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'inégalité $a_n \leqslant r$.

d. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

e. Quelle est la probabilité d'extinction de l'espèce alien ?

Problème II — Processus de Poisson (**)

On considère un système mécanique dans lequel surviennent des pannes. On modélise l'occurrence des pannes comme suit. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle temporel $[0, t]$ est une variable aléatoire N_t à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère que le système est réparé instantanément après chaque panne. On considère donc ici une famille $(\mathrm{N}_t)_{n\in[0,+\infty[}$ de variable aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Remarquons que la modélisation impose que pour tout t positif et tout $u \geqslant t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_u - \mathrm{N}_t$ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On fait les hypothèses suivantes :

- la variable aléatoire N_0 est égale à 0 ;
- pour tout $t > 0$, le nombre $\mathbb{P}(\mathrm{N}_t = 0)$ appartient à $]0, 1[$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(n+1)$-uplet $(t_0, \dots, t_n)$ croissant d'éléments de $[0, +\infty[$, les variables aléatoires $\mathrm{N}_{t_0}, \mathrm{N}_{t_1} - \mathrm{N}_{t_0}, \dots, \mathrm{N}_{t_n} - \mathrm{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (*hypothèse d'accroissements indépendants*) ;
- pour tout couple (s, t) d'éléments de $[0, +\infty[$ soumis à la condition $0 \leqslant s < t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_t - \mathrm{N}_s$ a la même loi que N_{t-s} (*hypothèse d'accroissements stationnaires*) ;
- le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h > 1)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

1. Pour tout u dans $[0, +\infty[$, on note G_u la fonction génératrice de la variable aléatoire N_u, que l'on définit simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\mathrm{G}_u(s) = \mathbb{E}(s^{\mathrm{N}_u}).$$

On fixe s dans $[0, 1]$.

a. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $[0, +\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_{u+v}(s) = \mathrm{G}_u(s)\mathrm{G}_v(s)$.

b. Prouver que la fonction $t \mapsto \mathrm{G}_t(s)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

c. Pour tout $u \geqslant 0$, prouver que $\mathrm{G}_u(s)$ est strictement positif. On pose alors $\theta(s) = -\ln(\mathrm{G}_1(s))$.

d. Pour tout u dans $[0, +\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

e. En déduire que le quotient $(\mathrm{G}_h(s) - 1)/h$ tend vers $-\theta(s)$ quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Pour tout s dans $[0, 1]$, prouver que le quotient

$$\frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N}_h = k)(s^k - 1)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3. En déduire que le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h = 1)/h$ possède une limite finie quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives. Cette limite est notée α.

De plus, pour tout s dans $[0, 1]$, prouver l'égalité $\theta(s) = \alpha(1 - s)$.

4. En considérant $\mathrm{G}_1(0)$, prouver que α est strictement positif.

5. Pour tout $u > 0$, prouver que la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Une famille de variables aléatoires $(\mathrm{N}_t)_{t\in[0,+\infty[}$ telle que celle étudiée ici s'appelle *un processus de Poisson*. La constante α est le *paramètre* de ce processus de Poisson.

La suite de l'étude n'est pas faisable dans le cadre de notre programme. On y prouve que l'instant où se produit la première panne est une variable aléatoire T qui suit une *loi exponentielle* de paramètre α. Cela signifie que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $[\mathrm{T} > t]$ vaut $\exp(-\alpha t)$.