Suggestions de révisions pour l'écrit

Ce document tente de donner des pistes pour optimiser le travail des différents chapitres. L'idéal est bien sûr d'être au point sur tout mais, selon votre niveau d'ambition, vous pouvez envisager de concentrer vos efforts sur certains aspects du cours et sur certains exercices emblématiques. Cette liste ne se veut pas exhaustive.

Chapitre 1 : analyse en une variable, polynômes, calcul matriciel

On veillera à être bien au point sur le programme de première année (théorème des valeurs intermédiaires, Rolle, accroissements finis, calcul de dérivées, calcul de primitives, intégration, développements limités, calculs de limites). S'il reste des confusions autour des notions de domination, négligeabilité et d'équivalence, ça peut valoir le coup de prendre le temps de clarifier tout ça. Bien garder à l'esprit que les définitions des symboles de négligeabilité et de domination sous-entendent des valeurs absolues.

L'exercice 6 illustre la méthode générale à employer pour manipuler des intégrales à bornes variables.
L'exemple essentiel d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée est détaillé dans cette vidéo.
Une bonne utilisation du théorème de Rolle est présente dans l'exercice 3 du devoir en temps libre 1.

Le lemme de Riemann-Lebesgue (exercice 1 du devoir en temps libre 2) est à savoir démontrer.

Concernant le calcul matriciel, l'exercice 8 du chapitre 1 peut être fort utile.

Chapitre 2 : produits scalaires

Ce chapitre comporte une grande quantité de définitions et de propriétés de cours, qu'il faut bien assimiler, notamment les histoires de projections orthogonales et les liens entre produit matriciel et produit scalaire.

Il faut être très au point sur la définition d'un produit scalaire et les méthodes pour justifier le caractère défini positif. Il est très fréquent dans les sujets de concours qu'on demande de prouver qu'une fonction est un produit scalaire.

Les thématiques des exercices 10 et 11 sont classiques, de même que la question de minimisation de l'exercice 2.

L'exercice 1 du devoir en temps libre 3 permet de travailler à la fois les polynômes, les intégrales généralisées et les produits scalaires, le tout sur un thème très classique. À compléter avec le problème 1 du devoir en temps libre 8.

Pour une utilisation un peu abstraite des projections orthogonales, je renvoie à l'exercice 6 du devoir en temps libre 2.

Chapitre 3 : séries numériques

Les séries étudiées dans les exercices 1, 2 et 3 sont un bon support pour assimiler les techniques classiques d'étude de convergence (en plus des exemples du cours). Les exercices 4 et 5 illustrent à la fois l'utilisation de développements limités pour l'étude de convergence — noter l'utilisation de la convergence absolue — et le recours aux séries télescopiques pour prouver qu'une suite converge.

L'exercice 6 est l'occasion d'effectuer des calculs de sommes (de séries entières).
L'exercice 13 explore bien le théorème des séries alternées (à compléter par le problème 2 du devoir surveillé 2).

Les plus ambitieux tireront profit d'un nouveau coup d'œil à l'exercice 19 (transformation d'Abel).

Chapitre 4 : intégrales généralisées

Il est important de comprendre les problématiques de ce chapitre ainsi que les techniques usuelles pour les résoudre (il y a souvent des valeurs absolues, par exemple). Il faut aussi comprendre comment se rédigent les changements de variable (la notion de bijection nécessite de mentionner *deux* intervalles).

Pour assimiler les techniques usuelles d'étude de convergence, les exemples du cours peuvent être complétés par les intégrales des exercices 1, 2, 3, 4 et 5. Éventuellement le 13 aussi.

L'exercice 6 donne une autre perspective en s'inscrivant dans un cadre un peu plus large.

Les plus ambitieux pourront consulter l'exercice 11. Je leur conseille également d'être bien au point sur les problématiques du paragraphe 4.11 de ce chapitre.

Chapitre 5 : espaces vectoriels normés

La priorité est de maîtriser les techniques employées pour justifier qu'une fonction est une norme (le cours contient une foule d'exemples). En particulier, j'ai bien insisté sur la manière dont on prouve des majorations sur les bornes supérieures. Ces techniques sont mises en lumière dans l'exercice 2 (voir aussi la première partie du devoir surveillé 4, piste rouge-noirâtre).

L'exercice 7 est une bonne illustration de l'interaction entre l'algèbre linéaire et les questions de convergence. On a pu le rencontrer dans plusieurs sujets d'écrit.

Le problème de synthèse « Inégalités de Hölder et de Minkowski » (devoir en temps libre 4) est également représentatif de ce qui peut être posé aux concours sur ce thème.

Chapitre 6 : suites de fonctions

Il est important de bien connaître le vocabulaire (convergence simple, convergence uniforme) et de bien retenir que la norme infinie de f est la borne supérieure de $|f|$, pas de f.

Les exercices 1 et 2 sont un bon complément aux exemples du cours.

Les exercices 4 et 5 peuvent être profitables aux plus ambitieux.

Chapitre 7 : séries de fonctions

Un travail linguistique s'impose : faire le tri dans tous les objets manipulés

- la fonction f_n ;
- le nombre $f_n(x)$;
- le nombre $||f_n||_\infty$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$;
- la suite numérique $(f_n(x))_{n\geqslant n_0}$;
- la suite numérique $(||f_n||_\infty)_{n\geqslant n_0}$;
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$;
- la série numérique $\sum_{n\geqslant n_0} f_n(x)$;
- la série numérique $\sum_{n\geqslant n_0} ||f_n||_\infty$;
- la fonction $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$;
- le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

Les exercices 1, 4 et 5 résument la plupart des techniques classiques à base de convergence normale et d'encadrement de sommes partielles par des intégrales.

L'exercice 3 du devoir surveillé 3 (piste bleue) illustre l'usage qu'on peut faire du théorème de dérivation dans le cadre d'un sujet d'écrit.

Parfois, on applique les théorèmes sur des segments puis on passe du local au global. Faire bien attention à effectuer ces opérations dans le bon ordre.

Chapitre 8 : algèbre linéaire de première année

Les exercices 2, 10, 11, 16, 27, 28 et 29 constituent une bonne base [1] de révision, mais il faut bien sûr compléter cela avec les exercices vus en première année, notamment les vérifications de type ≪ Montrer que tel ensemble est un sous-espace vectoriel de tel autre. ≫, ≪ Montrer que telle application est linéaire. ≫, ≪ Montrer que telle famille est libre. ≫ et ≪ Trouver le noyau et l'image de telle matrice ou application linéaire. ≫.

Les endomorphismes nilpotents (exercice 12) ne sont pas au programme, mais ça tombe de temps en temps.

Pour aller un peu plus loin, les exercices 25 et 31 sont recommandables.

L'exercice 3 du devoir surveillé 4 manipule des déterminants de manière intéressante.

Chapitre 9 : réduction des matrices et des endomorphismes

Dans ce chapitre, il y a encore un peu de vocabulaire à apprendre. Surtout, il faut être au point sur les caractérisations et les correspondances entre les différents points de vocabulaire.

L'exercice 1 donne quelques exemples efficaces pour saisir en quoi consiste la diagonalisation d'une matrice de petite taille. Pour une matrice de taille quelconque et de rang petit, les exercices 2 et 4 s'imposent. L'exercice 13 résume bien comment on aborde les questions de diagonalisation dans le monde des matrices par blocs. L'exercice 6 donne un exemple de réduction d'endomorphisme où les matrices interviennent peu. L'exercice 8 illustre bien la manière dont on gère les valeurs propres multiples.

Le problème I du devoir en temps libre 6 est un grand classique de l'écrit. Le problème II du même devoir est un approfondissement intéressant.

Chapitre 10 : séries entières

Ce chapitre comporte peu de définitions et de théorèmes mais il convient une fois de plus d'être parfaitement au point là-dessus. Les développements en série entière des fonctions usuelles sont à maîtriser, de même que leurs domaines de validité.

Les exercices 1, 2 et 4 donnent de bonnes bases concernant l'étude des rayons de convergence — on remarquera qu'on n'utilise que rarement la règle de d'Alembert mais très souvent la valeur absolue. Côté calcul, les exercices 6, 8 et 12 sont incontournables.

Les divers calculs du devoir en temps libre 7 sont un bon entraînement, de même que ceux du devoir surveillé 7 (piste bleue).

Chapitre 11 : théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale

Ces quatre théorèmes sont à connaître impeccablement.

Les exemples traités en classe sont à savoir refaire, y compris celui où le théorème d'intégration terme à terme est utilisé dans une démonstration par l'absurde. Attention à bien comprendre la subtilité de l'exercice 1, où l'on étend l'intervalle d'intégration à $[0, +\infty[$ afin qu'il ne dépende pas du paramètre n.

Analyser en détail les mises en pratique sur les exemples du cours, notamment le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction Γ.

On accueillera d'un sourire l'apparition de chaque **valeur absolue**, ce qui devrait suffire à illuminer la journée.

Là encore, faire bien attention aux passages du local au global.

Chapitre 12 : fonctions vectorielles

Ça peut toujours valoir le coup de rejeter un coup d'œil aux règles de dérivation.

1. Astuce.

Chapitre 13 : équations différentielles linéaires

Les techniques de résolutions d'équations différentielles de première année doivent être parfaitement maîtrisées, avec de plus une couche de vernis supplémentaire en termes de rigueur logique, maintenant que vous avez suffisamment de recul pour ça.

Le théorème de Cauchy linéaire est à connaître sous toutes ses formes, en n'oubliant aucune hypothèse quand on l'applique. Les points-méthodes relatifs à la parité et à la périodicité sont utiles.

Les diverses techniques classiques de résolution (changement de fonction inconnue, recherche d'une solution sous forme d'une somme de série entière) méritent que vous y reveniez, afin de travailler là encore les aspects logiques, comme les aspects calculatoires.

Pour cela, je recommande les exercices 1, 4, 7, 10, 11, 13 et 14. Oui, ça fait beaucoup.

Les plus ambitieux reverront avec profit l'exercice 1 du devoir en temps libre 8 ainsi que l'exercice 20 du chapitre 13.

Chapitre 15 : espaces euclidiens (bis)

La définition d'un produit scalaire est à connaître avec précision. Il faut connaître les liens entre produit scalaire et calcul matriciel et, autant que possible, dédramatiser la notion de projection orthogonale, qui est une notion géométrique essentielle.

Les propriétés des matrices orthogonales et des matrices symétriques sont à connaître impeccablement (elles ont l'avantage d'être peu nombreuses), la plus importante étant bien sûr le théorème spectral.

Parmi les exercices représentatifs, je préconise les numéros 6 et 8.

Le complément sur les matrices symétriques positives et définies positives est incontournable. On pourra l'approfondir avec les pistes bleue et rouge du devoir surveillé 6.

Chapitre 15 : dénombrement

Je conseille d'être au point sur les cardinaux de référence et les règles de calcul.

Chapitre 16 : probabilités

Il faut comprendre la place de chaque concept, afin de ne pas s'emmêler entre événements, variables aléatoires, univers et valeurs. Les schémas à base d'arbres manipulés au lycée ne sont pas à proscrire mais il ne peuvent plus suffire à justifier des calculs : il faut maintenant les formaliser au moyen des règles de calcul du cours (on exprime des relations entre événements puis on applique les règles de calcul sur les probabilités). Attention à ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.

Les lois classiques sont à connaître impeccablement, de même que les propriétés générales de l'espérance (notamment la linéarité et la formule du transfert), de la variance et de la fonction génératrice.

Sur les probas infinies, les exercices 6 et 7 font bien travailler les opérations sur les événements. Les exercices 11 et 12 fournissent des illustrations simples de la formule du transfert. Les exercices 16 et 17 sont des calculs incontournables sur la loi de Poisson. Les exercices 14 et 15 sont des grands classiques autour de la loi géométrique.

Plus techniques, l'exercice 5 et le problème sur la formule de Wald montrent ce qui peut tomber à l'écrit.

Le devoir en temps libre 9 (processus de Poisson) peut mériter un coup d'œil appuyé, dans la mesure où c'est un des grands classiques des probas qui n'est pas encore tombé à l'écrit. Dans ce même devoir, le lemme de Borel-Cantelli mérite aussi d'être étudié.

Chapitre 17 : topologie

De ce chapitre de vocabulaire, on retiendra surtout la manière dont on prouve qu'une partie est ouverte ou fermée au moyen d'équations ou d'inéquations. On retiendra aussi la définition d'une fonction lipschitzienne et le cas particulier des applications linéaires.

Ne pas oublier que le produit matriciel, le déterminant et le produit scalaire sont continus.

Chapitre 18 : fonctions de plusieurs variables : la définition d'une dérivée partielle (raisonnement sur des fonctions d'une seule variable) et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sont évidemment à maîtriser, de même que la règle de la chaîne et la définition du gradient (il est à valeurs vectorielles).

Les théorèmes sur les extremums sont indispensables. Un corollaire est la nécessité d'apprendre à justifier rigoureusement et simplement le fait qu'un ensemble soit ouvert ou fermé.

Il faut comprendre la démarche logique (et calculatoire) des raisonnements par analyse-synthèse employés pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Les exercices 6 et 13 sont des révisions de choix, ainsi que le calcul menant au laplacien en coordonnées polaires.

Chapitre 18 : courbes et surfaces : il est absolument essentiel de — non, je plaisante. Ce chapitre est tellement vide que je ne vois pas comment on pourrait vous infliger quoi que ce soit à ce sujet. Cela dit, les notions cinématiques de vecteur vitesse et vecteur accélération sont à connaître au moins pour la physique. Savoir que le vecteur vitesse dirige la tangente quand il est non nul est tout de même utile.

Surtout, mes rapides points de méthode pour obtenir une équation de droite pourraient se révéler utiles à l'occasion.
