20 avril 2022

Corrigé de l'épreuve 2 de mathématiques du concours Mines-Ponts, filière PC, par Édouard Lebeau [1]

Thèmes abordés. Calcul matriciel. Norme d'opérateur (hors programme). Séries matricielles (hors programme). Fractions rationnelles (hors programme). Séries de fonctions. Calcul intégral.

Commentaire global. Norme hermitienne, norme d'opérateur, séries de matrices, fractions rationnelles : rarement un sujet aura été aussi délibérément hors programme.

Cet énoncé est par ailleurs effroyablement long. Les questions sont numérotées de 1 à 20 mais il y a en réalité 33 questions — par exemple, la question 1 comporte en réalité trois questions. Si c'est un subterfuge pour essayer de faire croire que la longueur du sujet est raisonnable, celui-ci est pathétique.

Question 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{MX}$, définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans lui-même, est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, donc elle est continue.

La norme $|| \ ||$, définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne donc continue.

Par composition, la fonction $\mathrm{X} \mapsto ||\mathrm{MX}||$ est continue. La sphère Σ_n est fermée et bornée donc la fonction $\mathrm{X} \mapsto ||\mathrm{MX}||$ admet un maximum sur Σ_n.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons φ_M la fonction $\mathrm{X} \mapsto ||\mathrm{MX}||/||\mathrm{X}||$, définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$.

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, on observe l'égalité

$$\varphi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) = \left|\left|\mathrm{M}\frac{\mathrm{X}}{||\mathrm{X}||}\right|\right| = \varphi_\mathrm{M}(\mathrm{X}/||\mathrm{X}||)$$

en exploitant le fait que le vecteur $\mathrm{X}/||\mathrm{X}||$ est de norme 1.

Quand X parcourt $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, le vecteur normalisé $\mathrm{X}/||\mathrm{X}||$ décrit surjectivement Σ_n. On en déduit l'égalité ensembliste

$$\{\varphi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) \ ; \ \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\} = \{||\mathrm{MV}|| \ ; \ \mathrm{V} \in \Sigma_n\}.$$

Cet ensemble admet donc $||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$ pour plus grand élément.

Remarquons qu'une conséquence de ceci est la majoration suivante

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad ||\mathrm{MX}|| \leqslant ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}||\mathrm{X}||.$$

Soient M et M′ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prenons un élément X de Σ_n tel que $||\mathrm{M'M}||_{\mathrm{op}} = ||\mathrm{M'MX}||$. La remarque ci-dessus donne alors

$$||\mathrm{M'M}||_{\mathrm{op}} = ||\mathrm{M'MX}|| \leqslant ||\mathrm{M'}||_{\mathrm{op}}||\mathrm{MX}|| \leqslant ||\mathrm{M'}||_{\mathrm{op}} \times ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}.$$

Question 2. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Notons $\mathrm{I}(\mathrm{U}) = \{|\mathrm{V}^\mathrm{T}\,\mathrm{U}| \ ; \ \mathrm{V} \in \Sigma_n\}$.

Premier cas. On suppose que U est nul, auquel cas $\mathrm{I}(\mathrm{U}) = \{0\}$ et $\max \mathrm{I}(\mathrm{U}) = 0 = ||\mathrm{U}||$.

Deuxième cas. On suppose que U n'est pas nul. Le vecteur $\mathrm{W} = \overline{\mathrm{U}}/||\mathrm{U}||$ est alors un élément de Σ_n et on trouve

$$\mathrm{W}^\mathrm{T}\,\mathrm{U} = \frac{||\mathrm{U}||^2}{||\mathrm{U}||} = ||\mathrm{U}||,$$

ce qui prouve que $||\mathrm{U}||$ est un élément de $\mathrm{I}(\mathrm{U})$.

Prenons un vecteur V quelconque de Σ_n. Un premier calcul donne

$$\mathrm{V}^\mathrm{T}\,\mathrm{U} = \sum_{k=1}^{n} v_k u_k.$$

L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ donne alors

$$|\mathrm{V}^\mathrm{T}\,\mathrm{U}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_k| \times |u_k|.$$

1. Professeur de mathématiques au lycée Henri Poincaré (Nancy)

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k| \times |u_k| \leqslant \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}}_{=1} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2} = ||\mathrm{U}||, \quad \text{donc} \quad |\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{U}| \leqslant ||\mathrm{U}||,$$

ce qui prouve que $||\mathrm{U}||$ est un majorant de $\mathrm{I(U)}$.

On en déduit que $||\mathrm{U}||$ est le plus grand élément de $\mathrm{I(U)}$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons

$$\mathrm{J(M)} = \{|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Y}| \ ; \ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\}.$$

Premier cas. On suppose que M est la matrice nulle. Dans ce cas, l'ensemble $\mathrm{J(M)}$ est $\{0\}$, ce qui donne

$$\max \mathrm{J(M)} = 0 = ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}.$$

Deuxième cas. On suppose que M n'est pas la matrice nulle.

Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \Sigma_n \times \Sigma_n$. La première partie de cette question donne

$$|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Y}| \leqslant ||\mathrm{MY}||.$$

La majoration $||\mathrm{MY}|| \leqslant ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$ est connue, ce qui donne $|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Y}| \leqslant ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$.

Le nombre $||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$ est donc un majorant de $\mathrm{J(M)}$.

Prenons maintenant Y dans Σ_n tel que $||\mathrm{MY}|| = ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$. On sait que $||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}} > 0$ donc $\mathrm{MY} \neq 0$.
Prenons alors $\mathrm{X} = \overline{\mathrm{MY}}/||\mathrm{MY}||$, ce qui est un élément de Σ_n. On trouve

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Y} = \frac{||\mathrm{MY}||^2}{||\mathrm{MY}||} = ||\mathrm{MY}|| = ||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}.$$

Le nombre $||\mathrm{M}||_{\mathrm{op}}$ est donc le plus grand élément de $\mathrm{J(M)}$.

Question 3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe la majoration

$$||\mathrm{M}^k\mathrm{X}|| \leqslant ||\mathrm{M}^k||_{\mathrm{op}} \times ||\mathrm{X}|| \leqslant b(\mathrm{M}) \times ||\mathrm{X}||.$$

La suite $(||\mathrm{M}^k\mathrm{X}||)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Soit $\lambda \in \sigma(\mathrm{M})$. Soit X un vecteur propre de M associé à λ. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe la relation

$$\mathrm{M}^{k+1}\mathrm{X} = \mathrm{M}^k(\mathrm{MX}) = \mathrm{M}^k(\lambda\mathrm{X}) = \lambda\mathrm{M}^k\mathrm{X}.$$

La suite $(\mathrm{M}^k\mathrm{X})_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi une suite géométrique de raison λ. Son premier terme est X, ce qui donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k\mathrm{X} = \lambda^k\mathrm{X}.$$

Le calcul précédent donne alors [2]

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\lambda|^k||\mathrm{X}|| \leqslant b(\mathrm{M}) \times ||\mathrm{X}||.$$

Le vecteur X n'est pas nul donc $||\mathrm{X}|| > 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\lambda|^k \leqslant b(\mathrm{M}).$$

La suite $(|\lambda|^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $|\lambda| \leqslant 1$.

On a prouvé l'inclusion $\sigma(\mathrm{M}) \subset \mathbb{D}$.

Question 4. Commençons par le cas $n = 2$. Prenons

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ce calcul utilise le fait que la formule $||\mu\mathrm{X}|||\mu| \times ||\mathrm{X}||$ est valable pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, propriété facile à démontrer mais qui n'a pas été mentionnée par l'énoncé.

Son spectre est $\{1\}$, ce qui est contenu dans $\mathbb{D}$.

Une récurrence que je ne détaille pas donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $\mathrm{X} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est un élément de Σ_2. On trouve

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k\mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad ||\mathrm{M}^k\mathrm{X}|| = \sqrt{1+(1+k)^2},$$

si bien que la suite $(||\mathrm{M}^k\mathrm{X}||)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Par la contraposée de Q3, la matrice M n'appartient pas à $\mathcal{B}_n$.

Pour le cas général, on prend $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{1,2}$ et $\mathrm{X} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Question 5. Prenons une matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on connaît l'égalité

$$\chi_{\mathrm{D}}(z) = (z-d_1)\cdots(z-d_n).$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_n\}$. On trouve alors

$$\mathrm{R}_z(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{z-d_1}, \ldots, \frac{1}{z-d_n}\right).$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, posons

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D},k,k} = \prod_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} (\mathrm{X} - d_\ell).$$

Le polynôme $\mathrm{P}_{\mathrm{D},k,k}$ est de degré $n-1$ donc c'est un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, posons $\mathrm{P}_{\mathrm{D},i,j} = 0$. C'est aussi un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

On obtient alors les égalités

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad (\mathrm{R}_z(\mathrm{D}))_{i,j} = \frac{1}{\chi_{\mathrm{D}}(z)} \mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j}(z).$$

Soit maintenant M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{DQ}$.

On connaît les égalités $\chi_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{D}}$ et $\sigma(\mathrm{M}) = \sigma(\mathrm{D})$.
Prenons $z \in \mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_n\}$. On trouve

$$z\mathrm{I}_n - \mathrm{M} = \mathrm{Q}^{-1}(z\mathrm{I}_n - \mathrm{D})\mathrm{Q} \quad \text{puis} \quad \mathrm{R}_z(\mathrm{M}) = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{R}_z(\mathrm{D})\mathrm{Q}.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, on obtient alors

$$(\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (\mathrm{Q}^{-1})_{i,k}(\mathrm{R}_z(\mathrm{D}))_{k,\ell}\mathrm{Q}_{\ell,j} = \frac{1}{\chi_{\mathrm{M}}(z)} \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (\mathrm{Q}^{-1})_{i,k}\mathrm{P}_{\mathrm{D},k,\ell}(z)\mathrm{Q}_{\ell,j}.$$

En posant $\mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\ell=1}^{n} (\mathrm{Q}^{-1})_{i,k}\mathrm{P}_{\mathrm{D},k,\ell}\mathrm{Q}_{\ell,j}$, on a alors créé un polynôme $\mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathrm{M}), \quad (\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))_{i,j} = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j}(z)}{\chi_{\mathrm{M}}(z)}.$$

La matrice M vérifie $\mathcal{P}$

Question 6. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathrm{M})$, on obtient alors

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{R}_z(\mathrm{M})\, \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (\mathrm{R}_z(\mathrm{M}))_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j}(z)}{\chi_{\mathrm{M}}(z)} y_j.$$

Ainsi, on posant $\mathrm{P}_{\mathrm{M,X,Y}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_i \mathrm{P}_{\mathrm{M},i,j} y_j$, on crée un élément $\mathrm{P}_{\mathrm{M,X,Y}}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathrm{M}), \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{R}_z(\mathrm{M})\, \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{M,X,Y}}(z)}{\chi_{\mathrm{M}}(z)}.$$

Question 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la majoration

$$\left|\left| \frac{\mathrm{M}^k}{z^{k+1}} \right|\right|_{\mathrm{op}} \leqslant \frac{b(\mathrm{M})}{|z|^{k+1}}.$$

L'hypothèse $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ donne $|z| > 1$ puis $0 \leqslant 1/|z| < 1$, si bien que la série géométrique

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{b(\mathrm{M})}{|z|^{k+1}}$$

converge. Par domination, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \left|\left| \frac{\mathrm{M}^k}{z^{k+1}} \right|\right|_{\mathrm{op}}$ converge.

D'après le théorème admis par l'énoncé, on en déduit que la série de matrices $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{m^j}{z^{j+1}}$ converge.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Un télescopage donne

$$(z\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) \sum_{j=0}^{m} \frac{\mathrm{M}^j}{z^{j+1}} = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{\mathrm{M}^j}{z^j} - \frac{\mathrm{M}^{j+1}}{z^{j+1}} \right) = \mathrm{I}_n - \frac{\mathrm{M}^{m+1}}{z^{m+1}}.$$

Observons la domination

$$\left|\left| \frac{\mathrm{M}^{m+1}}{z^{m+1}} \right|\right|_{\mathrm{op}} \leqslant \frac{b(\mathrm{M})}{|z|^{m+1}}.$$

L'encadrement $0 \leqslant 1/|z| < 1$ donne que $1/|z|^{m+1}$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
On en déduit que la suite de matrices $(\mathrm{M}^{m+1}/z^{m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
Faisons tendre m vers $+\infty$ dans la formule télescopée (en utilisant la continuité du produit matriciel).

$$(z\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^j}{z^{j+1}} = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{R}_z(\mathrm{M}) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^j}{z^{j+1}}$.

Question 8. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{B}_n$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. L'inégalité triangulaire donne

$$\left|\left| \sum_{j=0}^{m} \frac{\mathrm{M}^j}{z^{j+1}} \right|\right|_{\mathrm{op}} \leqslant \sum_{j=0}^{m} \frac{||\mathrm{M}^j||}{|z|^{j+1}} \leqslant b(\mathrm{M}) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{|z|^{j+1}} \leqslant b(\mathrm{M}) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{|z|^{j+1}} = \frac{b(\mathrm{M})}{|z|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{b(\mathrm{M})}{|z| - 1}.$$

On fait tendre m vers $+\infty$ en utilisant la continuité de la norme $||\ ||_{\mathrm{op}}$, ce qui donne

$$||\mathrm{R}_z(\mathrm{M})||_{\mathrm{op}} \leqslant \frac{b(\mathrm{M})}{|z| - 1}.$$

On multiplie par $|z| - 1$, qui est positif, pour obtenir finalement $\varphi_{\mathrm{M}}(z) \leqslant b(\mathrm{M})$.

Question 9. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_j : t \mapsto c_j \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+1)t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction u_j est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $||u_j||_\infty = |c_j|$.
Par hypothèse de l'énoncé, la série de terme général $|c_j|$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{j\geqslant 0} u_j$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Cette convergence normale donne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La fonction u est donc définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction u_j est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ La série de fonctions $\sum\limits_{j\geqslant 0} u_j$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de continuité pour les sommes de séries de fonctions, la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on observe l'égalité

$$u(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $v_j : t \mapsto c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{1}$ Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction v_j est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$.

$\boxed{2}$ Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction v_j est bornée sur le segment $[-\pi, \pi]$, avec $||v_j||_{\infty,[-\pi,\pi]} = |c_j|$, ce qui est le terme général d'une série convergente.

Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{j\geqslant 0} v_j$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$.

Ces deux arguments permettent d'intégrer terme à terme sur le segment $[-\pi, \pi]$ et d'obtenir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t} \, \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \, \mathrm{d}t$ vaut 2π si $k = j$. Si $j \neq k$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\mathrm{i}(k-j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Il reste donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \times c_j \times 2\pi = c_j.$$

Question 10. Soit $t \in \mathbb{R}$. La continuité du produit matriciel donne

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{R}_{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}(\mathrm{M}) \, \mathrm{Y} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{M}^j \, \mathrm{Y}}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{j+1}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{M}^j \, \mathrm{Y}}{r^{j+1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+1)t}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $c_j = \dfrac{\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{M}^j \, \mathrm{Y}}{r^{j+1}}$. Par un calcul similaire au deuxième calcul de Q2, on obtient

$$|c_j| \leqslant \frac{||\mathrm{X}|| \times ||\mathrm{M}^j||_{\mathrm{op}} \times ||\mathrm{Y}||}{r^{j+1}} \leqslant \frac{||\mathrm{X}|| \times b(\mathrm{M}) \times ||\mathrm{Y}||}{r^{j+1}}.$$

L'encadrement $0 \leqslant 1/r < 1$ donne la convergence de la série géométrique $\sum\limits_{j\geqslant 0} \dfrac{1}{r^{j+1}}$.

Par domination, on en déduit que la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} c_j$ converge absolument.

Le calcul de Q9 donne alors

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad c_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}_{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}(\mathrm{M})\,\mathrm{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+1)t}\ \mathrm{d}t,\quad \text{puis}\quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}^j\,\mathrm{Y}=\frac{r^{j+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}_{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}(\mathrm{M})\,\mathrm{Y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+1)t}\ \mathrm{d}t.$$

Question 11. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit l'élément $f_n : t\mapsto \mathrm{e}^{int}$ de $\mathcal{C}^1$. Sa dérivée est donnée par

$$f_n' : t\mapsto \mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

On trouve alors $\mathrm{V}(f_n)=2\pi n$ et $||f_n||_\infty=1$, si bien que le quotient $\mathrm{V}(f_n)/||f_n||_\infty$, égal à $2\pi n$, peut être arbitrairement grand.

Il n'existe donc pas de $\mathrm{C}>0$ tel que

$$\forall f\in\mathcal{C}^1,\quad \mathrm{V}(f)\leqslant \mathrm{C}\,||f||_\infty.$$

Question 12. La fonction f' étant continue et à valeurs réelles, par la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe constant sur chaque intervalle où elle ne s'annule pas. Ainsi, pour tout $j\in[\![0,\ell]\!]$, la fonction f' est de signe constant sur $]t_j,t_{j+1}[$, ce qui donne

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}|f'(t)|\ \mathrm{d}t=\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}}f'(t)\ \mathrm{d}t\right|=|f(t_{j+1})-f(t_j)|\,.$$

Remarquons par ailleurs l'égalité $\mathrm{V}(f)=\displaystyle\int_{t_0}^{t_{\ell+1}}|f'(t)|\ \mathrm{d}t$. La relation de Chasles donne alors

$$\mathrm{V}(f)=\sum_{j=0}^{\ell}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|f'(t)|\ \mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{\ell}|f(t_{j+1})-f(t_j)|\,.$$

Soit $j\in[\![0,\ell$. Remarquons que $f(t_j)$ et $f(t_{j+1})$ sont des éléments du segment $[-||f||_\infty,||f||_\infty]$.

Premier cas. On suppose que $f(t_j)\leqslant f(t_{j+1})$. La relation de Chasles donne alors

$$\int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty}\psi_j=\int_{-||f||_\infty}^{f(t_j)}0+\int_{f(t_j)}^{f(t_{j+1})}1+\int_{f(t_{j+1})}^{||f||_\infty}0=f(t_{j+1})-f(t_j)=|f(t_{j+1})-f(t_j)|.$$

Deuxième cas. On suppose que $f(t_j)>f(t_{j+1})$. La relation de Chasles donne alors

$$\int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty}\psi_j=\int_{-||f||_\infty}^{f(t_{j+1})}0+\int_{f(t_{j+1})}^{f(t_j)}1+\int_{f(t_j)}^{||f||_\infty}0=f(t_j)-f(t_{j+1})=|f(t_{j+1})-f(t_j)|.$$

On obtient donc dans tous les cas l'égalité $\displaystyle\int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty}\psi_j=|f(t_{j+1})-f(t_j)|,$, qui donne finalement

$$\mathrm{V}(f)=\sum_{j=0}^{\ell}\int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty}\psi_j.$$

Question 13. Supposons que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ contienne au moins $\ell+2$ éléments. Considérons alors des éléments $x_0,\ldots,x_{\ell+1}$ distincts de cet ensemble, numérotés dans l'ordre croissant.

Pour tout $k\in[\![0,\ell]\!]$, la fonction f est continue sur le segment $[x_k,x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k,x_{k+1}[$, à valeurs réelles, et vérifie l'égalité $f(x_k)=f(x_{k+1})$ donc, par le théorème de Rolle, il existe y_k dans $]x_k,x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k)=0$.

Les inégalités

$$-\pi\leqslant x_0<y_0<x_1<\cdots<x_\ell<y_\ell<x_{\ell+1}<\pi$$

montrent que $y_0,\ldots,y_\ell$ sont $\ell+1$ éléments distincts de $\mathrm{C}(f)$ mais c'est impossible : cet ensemble est de cardinal ℓ.

On a alors prouvé par l'absurde que $f^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ est fini, de cardinal majoré par $\ell+1$.

L'intervalle $[-\pi,\pi[$ est la réunion disjointe des intervalles $[t_j,t_{j+1}[$, où i varie de 0 à ℓ. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ est donc la réunion disjointe des ensembles $f^{-1}(\{y\})\cap[t_j,t_{j+1}[$, où i varie de 0 à ℓ.

Sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}[$, la dérivée de f s'annule seulement en t_j, si bien que la fonction f est strictement monotone sur cet intervalle. Elle atteint donc la valeur y au plus une fois. On en déduit que le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap [t_j, t_{j+1}[$ vaut $\psi_i(y)$.

La partition énoncée ci-dessus donne donc l'égalité

$$\mathrm{N}(y) = \sum_{j=0}^{\ell}(y).$$

On en déduit la relation $\mathrm{V}(f) = \displaystyle\int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty} \mathrm{N}(y)\ \mathrm{d}y$.

L'ensemble $\{\mathrm{N}(y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ est une partie non vide de $[\![0, \ell+1]\!]$ donc elle a un plus grand élément, noté $||\mathrm{N}||_\infty$ dans la suite.

La relation précédente donne la majoration

$$\mathrm{V}(f) \leqslant \int_{-||f||_\infty}^{||f||_\infty} ||\mathrm{N}||_\infty\ \mathrm{d}y \leqslant 2 \times ||\mathrm{N}||_\infty \times ||f||_\infty.$$

Question 14. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on observe pour commencer l'égalité

$$f_u(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\frac{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\frac{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\frac{\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}{\overline{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}.$$

Introduisons les coefficients de P et de Q

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} p_k \mathrm{X}^k \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} q_k \mathrm{X}^k.$$

On trouve alors

$$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{p_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\sum_{k=0}^{n} \overline{p_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n-k)} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\sum_{k=0}^{n} \overline{q_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n-k)}.$$

Introduisons les polynômes $\tilde{\mathrm{P}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{p_k}\mathrm{X}^{n-k}$ et $\tilde{\mathrm{Q}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{q_k}\mathrm{X}^{n-k}$. Ce sont des éléments de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ et il vient

$$f_u(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\frac{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\frac{\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$$

puis

$$f_u(t) - y = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - y\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

Posons enfin $\mathrm{S} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\mathrm{P}\tilde{\mathrm{Q}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\mathrm{Q}\tilde{\mathrm{P}} - y\mathrm{Q}\tilde{\mathrm{Q}}$. C'est un polynôme de $\mathbb{C}_{2n}[\mathrm{X}]$ et on a l'équivalence

$$f_u(t) = y \iff \mathrm{S}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 0.$$

Supposons que le polynôme S soit le polynôme nul. Dans ce cas, l'équivalence prouve que f_u est constante, égale à y. La fonction f_u n'étant pas constante, on en déduit que S n'est pas le polynôme nul.

Ce polynôme possède donc au plus $2n$ racines complexes.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, définie de $[-\pi, \pi[$ vers $\mathbb{C}$, est injective, donc l'équation $\mathrm{S}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ admet au plus $2n$ solutions.

On en déduit que l'équation $f_u(t) = y$ admet au plus $2n$ solutions dans $[-\pi, \pi[$, ce qui revient à dire que l'ensemble $f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini, de cardinal majoré par $2n$.

Question 15. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto |\cos(u - \omega)|$ est π-périodique donc son intégrale sur tout intervalle de longueur π est la même. On en déduit l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u-\omega)|\ \mathrm{d}u = 2\int_{-\pi/2+\omega}^{\pi/2+\omega} |\cos(u-\omega)|\ \mathrm{d}u.$$

Pour tout u dans $[-\pi/2+\omega, \pi/2+\omega]$, on sait que $\cos(u-\omega)$ est positif donc

$$\int_{-\pi/2+\omega}^{\pi/2+\omega} |\cos(u-\omega)| \ \mathrm{d}u = \int_{-\pi/2+\omega}^{\pi/2+\omega} \cos(u-\omega) \ \mathrm{d}u = [\sin(u-\omega)]_{u=-\pi/2+\omega}^{u=\pi/2+\omega} = 2,$$

ce qui donne finalement $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u-\omega)| \ \mathrm{d}u = 4$.

Considérons $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $a + \mathrm{i}b = \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$. Pour tout u réel, on obtient alors

$$a\cos(u) + b\sin(u) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos(\omega)\cos(u) + \sin(\omega)\sin(u)) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(u-\omega).$$

On en déduit l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a\cos(u) + b\sin(u)| \ \mathrm{d}u = \sqrt{a^2+b^2}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u-\omega)| \ \mathrm{d}u = 4\sqrt{a^2+b^2}.$$

Question 16. Soit $u \in [-\pi,\pi]$. On trouve

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \quad f_u'(t) = g'(t)\cos(u) + h'(t)\sin(u).$$

Soit $t \in [-\pi,\pi]$. Le calcul de Q15 donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \ \mathrm{d}u = 4\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = 4\,|f'(t)|\,.$$

On en déduit l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \ \mathrm{d}u\right) \ \mathrm{d}t = 4\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| \ \mathrm{d}t = 4\mathrm{V}(f).$$

Question 17. L'identité admise donne

$$4\mathrm{V}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \ \mathrm{d}t\right) \ \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{V}(f_u) \ \mathrm{d}u.$$

Soit $u \in [-\pi,\pi]$.

Premier cas. La fonction f_u est constante. Dans ce cas, on obtient $\mathrm{V}(f_u) = 0$.

Deuxième cas. La fonction f_u n'est pas constante. Les résultats des questions 13 et 14 donnent alors la majoration

$$\mathrm{V}(f_u) \leqslant 2 \times 2n||f_u||_\infty.$$

Pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, observons les relations

$$|f_u(t)| = \left|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}f(t))\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}f(t)\right| = |f(t)| \leqslant ||f||_\infty,$$

ce qui donne $||f_u||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ puis $\mathrm{V}(f_u) \leqslant 4n \times ||f||_\infty$.

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$4\mathrm{V}(f) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} 4n \times ||f||_\infty \ \mathrm{d}u = 2\pi \times 4n \times ||f||_\infty$$

puis $\mathrm{V}(f) \leqslant 2\pi\, n\, ||f||_\infty$.

Question 18. Le calcul de Q10 nous invite à définir la fonction F_r par

$$\mathrm{F}_r(z) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}_{rz}(\mathrm{M})\,\mathrm{Y}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{F}_r(z) = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{M},\mathrm{X},\mathrm{Y}}(rz)}{\chi_{\mathrm{M}}(rz)}.$$

Ce choix fait de F_r un élément de $\mathcal{R}_n$. Ses pôles sont les nombres de la forme λ/r, où λ décrit $\sigma(\mathrm{M})$, donc les pôles de F_r sont des éléments de $\mathbb{D}_{1/r}$.

La formule finale de Q10 se réécrit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y} = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}\, \mathrm{d}t.$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}$. D'après Q2, on a la majoration

$$|\mathrm{F}_r(z)| \leqslant ||\mathrm{R}_{rz}(\mathrm{M})||_{\mathrm{op}}.$$

La définition de $b'(\mathrm{M})$ et l'inégalité $r|z| - 1 > 0$ donnent alors la majoration

$$|\mathrm{F}_r(z)| \leqslant \frac{b'(\mathrm{M})}{r|z| - 1}.$$

Question 19. En appliquant des règles de calculs qui ne sont pas au programme de la filière PC [3], la dérivée de la fonction $f_r : t \mapsto \mathrm{F}_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ s'écrit $t \mapsto \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{F}_r'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}$ se primitive en $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}/(\mathrm{i}(k+1))$.

Une intégration par parties donne donc

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y} = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \left(\left[\mathrm{F}_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}}{\mathrm{i}(k+1)} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}_r'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+2)t}\, \mathrm{d}t \right).$$

Le terme tout intégré est nul. Il reste

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y} = -\frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}_r'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+2)t}\, \mathrm{d}t.$$

Il en découle la majoration

$$\left|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y}\right| \leqslant \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{F}_r'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|\, \mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} |f_r'(t)|\, \mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \mathrm{V}(f_r).$$

La fraction rationnelle F_r vérifie les hypothèses de la partie 5 donc la question 17 donne $\mathrm{V}(f_r) \leqslant 2\pi n\, ||f_r||_\infty$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la première formule de Q18 donne

$$\left|\mathrm{F}_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| \leqslant \frac{b'(\mathrm{M})}{r\, |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| - 1} = \frac{b'(\mathrm{M})}{r - 1}$$

donc $||f_r||_\infty \dfrac{b'(\mathrm{M})}{r-1}$ puis

$$\left|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y}\right| \leqslant \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n\, b'(\mathrm{M}).$$

Question 20. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après Q2, on peut choisir X et Y dans Σ_n de manière à avoir $\left|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{M}^k\, \mathrm{Y}\right| = ||\mathrm{M}^k||_{\mathrm{op}}$, ce qui donne la majoration

$$||\mathrm{M}^k||_{\mathrm{op}} \leqslant \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n\, b'(\mathrm{M}),$$

valable pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $r > 1$. On peut en particulier appliquer cette inégalité pour le choix $r = 1 + 1/(k+1)$, ce qui donne

$$||\mathrm{M}^k||_{\mathrm{op}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} n\, b'(\mathrm{M}) = \mathrm{e}^{(k+1)\ln(1 + \frac{1}{k+1})}\, n\, b'(\mathrm{M}).$$

Utilisons pour finir l'inégalité classique

$$\forall s \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+s) \leqslant s,$$

qui donne en particulier $(k+1)\ln(1 + \frac{1}{k+1}) \leqslant 1$ puis

$$||\mathrm{M}^k||_{\mathrm{op}} \leqslant \mathrm{e}\, n\, b'(\mathrm{M}).$$

Cette majoration étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient finalement l'inégalité souhaitée

$$b(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{e}\, n\, b'(\mathrm{M}).$$

---

3. On n'est plus à ça près à ce stade du sujet.