Mathématiques — préparation à l'oral

Nombres complexes, polynômes

0664-17

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les points d'affixes respectives z, z^2, z^3.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que l'orthocentre du triangle ABC soit l'origine.

0375-17

Exercice 2. Trouver les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \mathrm{i}$.

0306-16

Exercice 3. Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$ et

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)\cdots(\mathrm{X}^n+1).$$

Calculer $\mathrm{P}(\omega)$.

0663-17

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

0385-17

Exercice 5. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Q}(0) = 0$.

0162-17

Exercice 6. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n à coefficients entiers tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{P}_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

Soit $a \in \mathbb{Q}$. On suppose que $\cos(a\pi)$ est rationnel. Montrer que $2\cos(a\pi)$ est entier.

A006-17

Exercice 7. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})^2$.

0736-22

Exercice 8. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ ait deux racines de module 1.

Espaces vectoriels et applications linéaires

0669-17

Exercice 9. Soient $z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((\mathrm{X} - z_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

0778-17

Exercice 10. Soient $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_q)$ et $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_p)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Montrer que la famille $(\mathrm{Y}_i \times \mathrm{X}_j^{\mathrm{T}})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

0670-17

Exercice 11. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que l'égalité $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = n$ équivaut à l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{F}$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{G}$.

b. Dans cette question, on prend $n = 3$; le sous-espace F est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G est la droite dirigée par le vecteur $(1, -1, 0)$. Déterminer alors un endomorphisme u solution du problème de la question précédente.

S001-22

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f.
Montrer que f est un multiple de Id_{E}.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E.
Montrer que f est un multiple de Id_{E}.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent. 0381-17

Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs et préciser leurs axes.

Exercice 14. **(**)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f^n est nul et que f^{n-1} ne l'est pas. A046-16

On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec g.

1. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

2. Montrer que $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

Exercice 15. **(**)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle condition existe-t-il un supplémentaire commun à F et G ? 0319-16

Exercice 16. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. A017-17

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$?

2. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Matrices

Exercice 17. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$. 0783-17

a. Déterminer le rang de M.

b. Calculer M^{-1} en cas d'existence.

Exercice 18. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A^{T} sont semblables. 0776-17

Exercice 19. Montrer que les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables. 0509-17

Exercice 20. Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^{T} commute avec M. Montrer que M est diagonale. 0387-17

Exercice 21. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{AB} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$. 0542-16

Montrer que les matrices A et B commutent.

Exercice 22. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier k strictement positif vérifiant l'égalité A035-16

$$(k+1)\mathrm{M}^k = k\mathrm{M}^{k+1}.$$

Montrer que la matrice $\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ est inversible.

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. On fait les hypothèses 0757-16

$$f^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \qquad g^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \qquad f \circ g + g \circ f = 0.$$

a. Montrer que la dimension de E est paire.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminant

A071-17

Exercice 24. 1. On considère des polynômes unitaires $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ tels que pour tout indice k concerné, le polynôme P_k soit de degré k. Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$.

Calculer le déterminant de la matrice $(\mathrm{P}_{j-1}(a_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)x_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

0396-17

Exercice 25. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Montrer l'égalité $\operatorname{dét}(\mathrm{M}) = \operatorname{dét}(\mathrm{I}_n + \mathrm{AB})$.

0819-19

Exercice 26. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

A019-16

Exercice 27. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On définit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha+\beta & \text{si } i = j \\ 2\alpha & \text{si } i > j \\ 2\beta & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Calculer le déterminant de la matrice A. Dans le cas $\alpha + \beta = 0$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Réduction

S002-21

Exercice 28. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que le spectre de M est $\{0\}$.

2. Calculer $\operatorname{dét}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_n)$.

0407-17

Exercice 29. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Déterminer la dimension de $\{\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$.

A018-17

Exercice 30. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note d_n le déterminant de la matrice A_n.

1. Montrer la relation $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$.

2. Exprimer d_n en fonction de n.

3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

4. La matrice A_n admet-elle 0 pour valeur propre ?

Exercice 31. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$ est la matrice nulle. A054-17

A012-17

Exercice 32. Pour tout polynôme réel P, on pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^3 - \mathrm{X})\mathrm{P}' - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}$.

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

0793-17

Exercice 33. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A_n possède exactement une valeur propre réelle strictement positive.

b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?

A014-17

Exercice 34. Soit M une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cela signifie que ses coefficients sont positifs et que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1).

a. Vérifier que 1 est une valeur propre de M.

b. Montrer que les valeurs propres de M ont un module majoré par 1.

c. Soit λ une valeur propre de M de module 1. Montrer que λ vaut 1.

A038-17

Exercice 35. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A et B sont diagonalisables.

b. Montrer que A + B n'est pas diagonalisable.

c. On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

d. Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

e. Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

f. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables. Déterminer l'intersection $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}$. En déduire l'inégalité

$$\dim(\mathrm{F}) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

g. Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

h. Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

A045-17

Exercice 36. Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \mathrm{I})^2)$.

Exercice 37. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A066-17

Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

Exercice 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0$. A068-17

a. Soit λ une valeur propre de A. Prouver l'égalité $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.

b. Calculer la trace de A.

Exercice 39. **(***)** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing$. On suppose que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. 0370-18

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM - MB = C$.

Exercice 40. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$. 0903-16

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 41. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf $a_{1,1}$, qui vaut -1. 0334-16

Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$?

Exercice 42. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i x_j$. 0546-16

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 43. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose A066-16

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que les matrices M et N soient semblables.

Espaces euclidiens

Exercice 44. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose A085-17

$$(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 45. Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. A042-17

1. Montrer que $(P|Q)$ est bien défini.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on admet l'existence d'un polynôme T_n vérifiant l'identité

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 46. Soit E un espace euclidien de dimension n. On considère des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de E et on suppose que 0380-22

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|v_i)^2.$$

Que dire de la famille $(v_1, \dots, v_n)$?

Exercice 47. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On note λ la plus petite valeur propre 0420-17
de u et μ la plus grande.
Pour tout vecteur x de E, montrer l'encadrement $\lambda_1 ||x||^2 \leqslant (u(x)|x) \leqslant \lambda_n ||x||^2$.

Exercice 48. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. 0702-17
Démontrer l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 49. Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer 0698-17
que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Exercice 50. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est *définie positive*, ce qui signifie qu'elle A024-17
vérifie la propriété suivante

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} > 0.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

2. On note λ la plus grande valeur propre de A et μ la plus petite.
On fixe un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on veut démontrer l'encadrement

$$||\mathrm{X}||^4 \leqslant (\mathrm{X}|\mathrm{AX})(\mathrm{X}|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}) \leqslant \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu} ||\mathrm{X}||^4.$$

On considère la fonction polynomiale $f : s \mapsto (\mathrm{X}|\mathrm{AX})s^2 - (\lambda+\mu)(\mathrm{X}|\mathrm{X})s + \lambda\mu(\mathrm{X}|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X})$.

a. On pose $\mathrm{N} = -\mathrm{A} + (\lambda+\mu)\mathrm{I} - \lambda\mu\mathrm{A}^{-1}$. Vérifier que N est une matrice symétrique à valeurs propres positives.

b. Déterminer le signe de $f(0)f(1)$.

c. Conclure.

Exercice 51. Soient a et b deux vecteurs d'un espace euclidien E. On suppose que ces deux vecteurs sont de norme 1 A056-17
et qu'ils forment une famille libre.
On définit l'endomorphisme $f : x \mapsto (x|a)b + (x|b)a$ de E.

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 52. Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 0422-17

a. Montrer l'existence d'une matrice orthogonale O et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $\mathrm{M} = \mathrm{OT}$.

b. Montrer la majoration $\mathrm{dét}(\mathrm{M})^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 53. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. On pose $u = p + q$. 0761-16

a. Montrer que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans $[0, 2]$.

c. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Exercice 54. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son spectre est inclus dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$. 0559-16

Exercice 55. On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et on le munit du produit scalaire défini par A052-16

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On introduit le sous-ensemble F de E donné par

$$\mathrm{F} = \left\{x \mapsto ax+b\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et qu'il possède un supplémentaire orthogonal dans E.

2. Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur F.

3. Prouver que $\min \left\{ \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - ax - b\right)^2\ \mathrm{d}x\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 56. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique. 0760-16

a. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$x - y - z + t = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - z - t = 0.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à F.

b. Déterminer l'ensemble des symétries de $\mathbb{R}^2$ qui commutent avec toutes les symétries orthogonales.

Exercice 57. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. A018-16

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer qu'il existe dans E un supplémentaire de F stable par u.

Exercice 58. On définit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\mathrm{P}_n : x \mapsto (-1)^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$. 1048-22

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n est un polynôme de degré n, dont le coefficient dominant vaut 2^n. Préciser sa parité.

b. Montrer que la formule $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Calculer $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{Q} \rangle$.

d. Montrer que la famille $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Espaces vectoriels normés

Exercice 59. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que tous les coefficients de M sont positifs et que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1. A009-16

a. Pour toute valeur propre complexe λ de M, prouver l'inégalité $|\lambda| \leqslant 1$.

b. On suppose que M est diagonalisable. Montrer alors que pour tout vecteur colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la suite de terme général

$$\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{M}^\ell \mathrm{X}$$

converge vers un vecteur d'un certain espace propre de M.

Exercice 60. On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose A048-17

$$\mathrm{N}(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty.$$

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Prouver la majoration $||f||_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$.

c. Existe-t-il $\lambda > 0$ tel que $\forall f \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(f) \leqslant \lambda ||f||_\infty$?

Exercice 61. Pour tout vecteur $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{N}(u) = \sup\{|x+ty|\ ;\ t \in [0,1]\}$. 0920-16

a. Prouver l'égalité $\mathrm{N}(u) = \max(|x|, |x+y|)$.

b. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

c. On note B la boule unité fermée de N. Trouver le plus petit disque euclidien contenant B et le plus grand disque euclidien contenu dans B.

Exercice 62. (**) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A un ouvert de E. Soit B une partie quelconque de E. 1047-18

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Adh}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{Adh}(\mathrm{A} \cap \mathrm{Adh}(\mathrm{B}))$.

b. Trouver un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.

Exercice 63. (**) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose 0385-18

$$\mathcal{E} = \left\{\mathrm{PMP}^{-1}\,;\, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est borné si, et seulement si, la matrice M est un multiple de I_n.

Suites numériques

Exercice 64. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{R}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$ et $\mathrm{S}_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$. 1213-22

a. Calculer la limite de R_n quand n tend vers $+\infty$.

b. Trouver un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 65. On fixe $u_0 > 0$ puis on pose $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0430-17

Exercice 66. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$. 0513-17

a. Montrer que M_n admet trois valeurs propres réelles $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ telles que

$$\alpha_n < 0 < \beta_n < 2 < \gamma_n.$$

b. Étudier le comportement asymptotique des trois suites réelles ainsi définies (limites, équivalents).

Exercice 67. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = n(x_n - n)$. 0429-17

Montrer que la relation $x_n = \mathcal{O}(n)$ équivaut à $x_1 = 2\mathrm{e}$.

Exercice 68. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$. A086-19

Exercice 69. Pour tout s dans $\mathbb{N}^*$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{s-1}$ est équivalent à n^s/s quand n tend vers $+\infty$. 0496-16

Exercice 70. **a.** Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, prouver que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ possède deux solutions distinctes strictement positives, notées u_n et v_n avec la condition $u_n < v_n$. 0498-16

b. Montrer que u_n tend vers une certaine limite ℓ à préciser puis trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

c. Trouver la limite de v_n puis un équivalent.

d. Poursuivre le développement asymptotique de v_n.

Exercice 71. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On fixe $u_0 > 0$ et on pose A062-16

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et qu'il est strictement positif. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Dans cette question, tous les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valent 1.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la minoration $u_n \geqslant 2$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $(u_n)^2 = (u_0)^2 + 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(u_k)^2}$.

d. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la minoration $u_n \geqslant \sqrt{2n}$.

3. On revient au cas général.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $u_n = u_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{u_k}$.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum a_k$ converge.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 72. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1/2$. 0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Exercice 73. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x/\ln(x)$ réalise une bijection de $[\mathrm{e},+\infty[$ sur lui-même. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. 0450-17

Exercice 74. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$. 0584-17

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 75. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$. 0580-17

On veut montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel x. Quitte à échanger les rôles de f et de g, on fait l'hypothèse $f(0) > g(0)$.

a. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout x dans $[0,1]$, on ait $f(x) \geqslant g(x) + c$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, prouver l'inégalité

$$f^{\circ n}(x) \geqslant g^{\circ n}(x) + nc,$$

où la notation $f^{\circ n}$ désigne la composée n-ième de f avec elle-même.

c. Conclure.

Exercice 76. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. 0094-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$, prouver la relation $f_n^{(2n+2)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n} (2k+1)^2\right) (1+x^2)^{-n-\frac{3}{2}}$.

Exercice 77. Trouver a et b réels pour que $\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{\mathrm{e}^x - 1}$ possède un équivalent de la forme cx^d quand x tend vers 0, l'exposant d étant le plus grand possible. A057-16

Exercice 78. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$. 0503-16

Exercice 79. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant l'identité $xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. 0929-16

Séries numériques

Exercice 80. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Y a-t-il des implications entre les deux énoncés suivants ? 0440-17
(i) La série $\sum a_n$ converge.
(ii) $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 81. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$. 0830-17

Exercice 82. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. 0719-17

a. Justifier l'existence de R_n.

b. Montrer que $(n+1)!\mathrm{R}_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

Exercice 83. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ (convergence et convergence absolue). A050-17

Exercice 84. (**) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents : A026-18
- la série $\sum a_n$ converge ;
- la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge et $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 85. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel. 0533-16

0380-09

Exercice 86. Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

0381-09

Exercice 87. Déterminer un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_n soit équivalent à $\dfrac{(-1)^n}{n}$, mais telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ soit divergente.

Exercice 88. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $0<a<b-1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs vérifiant la relation de récurrence A084-17

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=\frac{n+a}{n+b}u_n.$$

1.

a. Trouver un équivalent de $\ln((n+a)/(n+b))$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$ tend vers $-\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=n^{b-a}u_n$.

a. Montrer que la série de terme général $\ln(v_n)$ est convergente.

b. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K}>0$ telle que u_n soit équivalent à K/n^{b-a} quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

3. Prouver l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n=u_0\times\dfrac{b-1}{b-a-1}$.

Indication : simplifier les sommes $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}}((n+b)u_{n+1}-(n+a)u_n)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}}((n+1)u_{n+1}-nu_n)$.

Suites et séries de fonctions

0731-17

Exercice 89. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=3^n\left(x^{2^n}-x^{2^{n+1}}\right)$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1]$.

b. Le passage à la limite sous l'intégrale dans $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est-il valide ?

Exercice 90. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : t\mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$. 1100-18

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi/2]$, puis la convergence uniforme.

0585-15

Exercice 91. On fixe $\alpha>0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f_n : x\mapsto\dfrac{(nx)^\alpha}{1+nx^2}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

b. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$? sur les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$?

0616-17

Exercice 92. Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ quand x tend vers 1.

A011-18

Exercice 93.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Énoncer le théorème des séries alternées dans sa totalité.

2. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

4. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

5. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

7. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

1119-17

Exercice 94. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto n x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}$.

Étudier les différents modes de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

A046-17

Exercice 95. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

0580-16

Exercice 96. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur cet ensemble.

0600-17

Exercice 97. Trouver l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}$.

Après avoir simplifié le produit $\displaystyle\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(1 + x^{2^n}\right)$, expliciter $f(x)$.

0606-17

Exercice 98. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - \mathrm{i}x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle intégrable ?

Séries entières

Exercice 99. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. 0305-17

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Exercice 100. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} (3 + (-1)^n)^n x^n$. 0738-17

Exercice 101. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^n \, \mathrm{d}t$. Pour tout x convenable, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. 0858-17

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S.

b. Exprimer $\mathrm{S}(x)$.

Exercice 102. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{2n+1}$. A060-18

Exercice 103. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$. 0816-18

Exercice 104. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. 0579-18

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n x^n$.

Exercice 105. (***) On fixe ε dans $]0, \pi[$ et on introduit l'ensemble 0190-18

$$\Omega = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ ; \ 0 \leqslant r \leqslant 1, -\pi + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon\}.$$

On définit la fonction $f : z \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{z^k}{k}$.

a. Trouver le rayon de convergence de la série entière associée à f.

b. On pose $\mathrm{S}_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{z^k}{k}$. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'ensemble Ω.

Pour cela, on écrira

$$\mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_{n-1}(z) - \mathrm{T}_n(z)}{k} \qquad \text{en ayant posé} \qquad \mathrm{T}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} z^k.$$

c. On fixe θ dans $]-\pi, \pi[$. Dériver la fonction $\ell_\theta : x \mapsto f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ sur $[0, 1[$.

d. Montrer que la fonction $\mathrm{L} : x \mapsto \exp(\ell_\theta(x))$ a une dérivée seconde nulle.

e. En déduire une expression de $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Exercice 106. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{n} x^n$. 0863-17

Exercice 107. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence R fini et strictement positif. 0515-16

Trouver les rayons de convergence de $\sum a_n z^{2n}$, de $\sum (a_n)^2 z^n$ et de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 108. Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{3^{n^2}} x^n$. 0587-16

Exercice 109. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. 0588-16

Exercice 110. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \exp(x\sin(t))\ \mathrm{d}t$ est-elle développable en série entière ? A051-17

Exercice 111. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$. A077-17

Intégration

Exercice 112. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive. 0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 113. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}}\ \mathrm{d}x$ quand α tend vers 0. 1114-17

Exercice 114. Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que A057-18

$$\forall x \geqslant 0, \quad c\int_0^x f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice 115. Soient u et v deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose qu'il existe une constante c positive vérifiant la propriété 0410-14

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer la domination

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad u(x) \leqslant c\exp\left(\int_0^x v(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

Exercice 116. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $(a_0,b_0) = (a,b)$ puis 0710-16

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

a. Montrer que ces deux suites sont convergentes puis qu'elles ont la même limite. Cette limite est notée $\mathrm{M}(a,b)$. C'est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

Pour tout couple (x,y) d'éléments de $]0,+\infty[$, on pose $\mathrm{T}(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(x^2+u^2)(y^2+u^2)}$.

b. Prouver l'identité $\mathrm{T}\left(\dfrac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right) = \mathrm{T}(x,y)$. On utilisera pour cela le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$.

c. En déduire une expression de $\mathrm{M}(a,b)$ en fonction de $\mathrm{T}(a,b)$.

Exercice 117. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin}(t)}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0. 0881-17

Exercice 118. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$. 0943-16

a. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

b. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la limite de $n\mathrm{I}_n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Trouver un développement asymptotique de la forme $\mathrm{I}_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 119. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. 0599-16

a. Déterminer l'ensemble de définition de F.

b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.

c. Calculer $\mathrm{F}(x)$.

Exercice 120. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que g est 1-périodique et différente de la fonction nulle. On définit la fonction 0850-16

$$\mathrm{G} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que la fonction G est définie sur $]0,+\infty[$.

b. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.

Exercice 121. On note $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Pour tout x de D, on pose A022-16

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

1. Prouver l'identité $\left|x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1$.

2. Montrer que I est bien définie sur D.

3. Pour tout x non nul de D, prouver la formule $\mathrm{I}(1/x) = -2\pi\ln(|x|) + \mathrm{I}(x)$.

4. Montrer que la fonction I est paire (on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi - \theta$).

5. On admet l'identité

$$\forall x \in\,]0,1[, \quad \forall \theta \in [0,\pi], \qquad 1 - 2x^2\cos(2\theta) + x^4 = (1-2x\cos(\theta)+x^2)(1+2x\cos(\theta)+x^2).$$

a. Pour tout x dans $]0,1[$ et tout θ dans $[0,\pi]$, prouver que les nombres

$$1-2x\cos(\theta)+x^2 \qquad \text{et} \qquad 1+2x\cos(\theta)+x^2$$

sont strictement positifs.

b. Pour tout x dans $]0,1[$, prouver l'égalité $\mathrm{I}(x^2) = 2\mathrm{I}(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = 2\theta$).

6. Obtenir une expression de $\mathrm{I}(x)$.

Exercice 122. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. 0594-17

Exercice 123. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. 0587-17

Exercice 124. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale 0726-17

$$\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur en cas d'existence.

Exercice 125. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. A070-17

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il est possible de poser $\mathrm{A}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

b. Trouver un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$ dans le cas $f(0) \neq 0$.

Exercice 126. Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$. 0846-17

a. Si f est intégrable sur $[0,+\infty[$, montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 127. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. 0631-17

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Trouver une relation entre f et f' et en déduire une expression de f.

Exercice 128. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$. 0887-17

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$.

Exercice 129. Trouver un équivalent de $\mathrm{Arccos}(u)$ quand u tend vers 1. 1135-17

En déduire que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{Arccos}(1-xt)}$ est bien définie puis prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 130. Soit φ une fonction continue, décroissante et positive sur $[0,+\infty[$. 0626-17

Déterminer la limite de $x\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 131. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$. 1085-22

a. Montrer que f est effectivement définie sur $]0,+\infty[$.

b. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

Équations différentielles

Exercice 132. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 3x & - & 2y \\ y' & = & 2x & - & y. \end{array}\right.$ A043-17

Exercice 133. Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, à valeurs strictement positives, telle que q' soit strictement positive. 0638-17

Montrer que les solutions de $y''+qy=0$ sont bornées sur $[0,+\infty[$. (Indication : multiplier par y'/q.)

Exercice 134. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$. A028-17

On admet la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

On note (E) l'équation différentielle $(x^2-1)y''(x)+3xy'(x)+y(x)=0$.

1. Pour tout t dans $[0,\pi/2]$, déterminer la limite de $\cos^n(t)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_{2n+1}x^{2n+1}$.

Pour tout x dans $]-1,1[$, on pose $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}x^{2n+1}$.

4. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver l'égalité

$$(x^2-1)g''(x)+2xg'(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^2 u_{2n+1} - (2n+2)(2n+3)u_{2n+3}\right) x^{2n+1}.$$

En déduire que g est solution de (E) sur $]-1,1[$.

On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n}x^{2n}$ est également solution de (E) sur $]-1,1[$.

5. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ à l'aide des fonctions f et g.

6. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver l'égalité $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1-x^2\cos^2(t)} \cos(t)\ \mathrm{d}t$.

7. En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 135. Intégrer l'équation différentielle $x^2f'(x)+f(x)=1$. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$. 0972-16

Exercice 136. Résoudre l'équation différentielle $x^2y''+y=0$ sur $]0,+\infty[$ à l'aide de la fonction $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$. 2021-09

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 137. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $|ab|<1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule A087-17

$$f(x,y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

Exercice 138. On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ l'application $f : (x,y) \mapsto (x+y, x^7-y^7)$. 0610-16

Montrer que f est une bijection.

Exercice 139. Déterminer les extrema de $f : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$. 0761-17

Exercice 140. On définit $f : (x,y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t+\exp(t-1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$. A063-17

Résoudre l'équation $g(t)=0$. En déduire les points critiques de f.

Exercice 141. Pour tout $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2$, on pose $f(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{32}{xy}$. 1094-22

a. La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

b. La fonction f possède-t-elle un minimum global ?

c. Déterminer les extremums de f sur $[1,3]^2$.

Exercice 142. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2})$. 1140-17

Exercice 143. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $||x||$ tend vers $+\infty$.

Exercice 144. Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto y(x^2+\ln(y))$ en précisant s'il s'agit d'extremums locaux ou globaux. 0858-15

Probabilités et dénombrement

Exercice 145. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$. 0613-16

Exercice 146. On considère trois urnes. L'urne U_1 contient trois boules blanches et quatre boules noires. L'urne U_2 contient cinq boules blanches et cinq boules noires. L'urne U_3 contient quatre boules blanches et six boules noires. A059-17

On pioche une boule dans U_1 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_2. On pioche ensuite une boule dans U_2 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_3. On pioche enfin une boule dans U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité que les trois boules piochées soient de la même couleur.

Exercice 147. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, de paramètre $p \in]0,1[$. On appelle *doublet* le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose $q=1-p$. 0765-17

L'événement A_n a pour énoncé « On obtient le premier doublet au rang n. ».
L'événement B_n a pour énoncé « On a obtenu au moins un doublet au cours des n premières épreuves. ».
On pose $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

a. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \sum\limits_{k=1}^n p_k$.

b. Justifier la formule de récurrence $p_{n+3} = p^2 q\left(1-\sum\limits_{k=1}^n p_k\right)$.

c. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n$.

d. Résoudre cette relation de récurrence en passant par le calcul des puissances d'une matrice.

Exercice 148. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables (y compris la poignée vide). On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. 0655-17

Calculer l'espérance de X.

Exercice 149. Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. 1234-22

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

On définit la variable aléatoire Z par

$$\forall w \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 150. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. 0906-17

On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$. Déterminer la loi de T.

Exercice 151. Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique une journée donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou aucun article. Déterminer la loi de Y, le nombre d'articles achetés au cours d'une journée. 0905-17

Exercice 152. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. 0916-17

Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 153. On lance deux pièces équilibrées indéfiniment. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « Les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face au cours des n premiers lancers. ». 1143-17

a. Déterminer $\mathbb{P}(E_n)$.

b. Sur les n premiers lancers, quel est le nombre moyen d'indices k pour lesquels l'événement E_k est réalisé ?

Exercice 154. Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ? 0157-19

Exercice 155. Soit ABC un triangle orienté. Trois particules naviguent entre les trois sommets de ce triangle. 0419-22

À l'instant 0, les trois particules sont au sommet A. Entre l'instant n et l'instant $n+1$, une particule donnée reste en place ou se déplace au sommet suivant dans le sens trigonométrique, les deux options étant équiprobables. Les « choix » des trois particules sont supposés indépendants.

Pour tout n, on note V_n l'événement « les trois particules sont au même endroit à l'instant n ».
Calculer $\mathbb{P}(V_n)$.

Exercice 156. On fixe un entier $p \geqslant 2$. On considère une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$. On pose $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$. 0925-17

Déterminer la loi de M_n et la limite de $\mathbb{E}(M_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 157. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. A019-17

On se donne des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ mutuellement indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Pour tout i dans $[\![1,N]\!]$ et tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_i > n)$.

2. On définit la variable aléatoire $Y_N = \min(X_1, \ldots, X_N)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y_N > n)$.

3. Montrer que Y_N possède une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 158. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on fait les hypothèses A080-17

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=1)=0,2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=0)=0,4.$$

On note $x_n=\mathbb{P}(\mathrm{X}_n=1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.

2. En déduire une expression de x_n.

3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ et de $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$.

Exercice 159. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. 0908-17

Exercice 160. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit f une fonction définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$, à valeurs réelles. On pose $\mathrm{Y}=f(\mathrm{X})$. 0650-17

On suppose que X et Y sont indépendantes. Que dire de Y ?

Exercice 161. Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On pose $\mathrm{Z}=\mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$. A060-17

Montrer qu'il existe k dans $[\![0,2]\!]$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)\geqslant 4/9$.

Géométrie

Exercice 162. On considère la courbe paramétrée par $\mathrm{M}(t)=(x(t),y(t))=(\cos^3(t),\sin^3(t))$. 0894-16

a. Comparer les positions des points $\mathrm{M}(t),\mathrm{M}(-t),\mathrm{M}(\pi-t),\mathrm{M}(\pi/2-t)$. En déduire un intervalle aussi petit que possible permettant d'obtenir la totalité de la trajectoire.

b. Tracer la trajectoire de cette courbe.

c. Déterminer une équation de la tangente aux points réguliers de cette courbe.

d. Si $\mathrm{M}(t)$ est un point régulier de cette courbe, on note $\mathrm{A}(t)$ le point d'intersection de la tangente en ce point avec l'axe des abscisse et $\mathrm{B}(t)$ le point d'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées. Calculer la distance entre ces deux points.

Exercice 163. On définit l'ensemble $\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y^2=x^3-2x\}$. 0477-17

a. Tracer l'ensemble D.

b. Soient A et B deux points distincts de D d'abscisses négatives. Discuter le nombre de points d'intersection entre la droite (AB) et l'ensemble D.

Exercice 164. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $\mathrm{A}=(-1,0,1)$ et $\mathrm{B}=(3,1,0)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u}=(2,1,0)$ et $\vec{v}=(1,1,1)$. 1152-17

a. Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Idem pour la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.

b. Montrer qu'il existe une valeur minimale de la distance MN lorsque M est un point qui parcourt la droite D et N est un point qui parcourt la droite Δ. On déterminera cette distance.

Exercice 165. Soit $p>0$. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2=2px$. Le point $\mathrm{F}=(p/2,0)$ est *le foyer* de cette parabole. La droite d'équation $x=-p/2$ est *la directrice* de cette parabole, notée $\mathcal{D}$. S002-16

a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points du plan équidistants de F et de $\mathcal{D}$.

b. Soit M un point de la parabole $\mathcal{P}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point M est la médiatrice du segment [HF], où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$.
